دينـاميك سيـارات (المرحلة الرابعة)

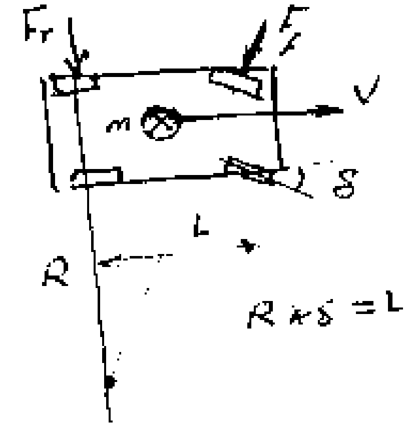
نظري : 2 ساعة / أسبوع
عملي : 1 ساعة / أسبوع
مناقشة : 1 ساعة / أسبوع

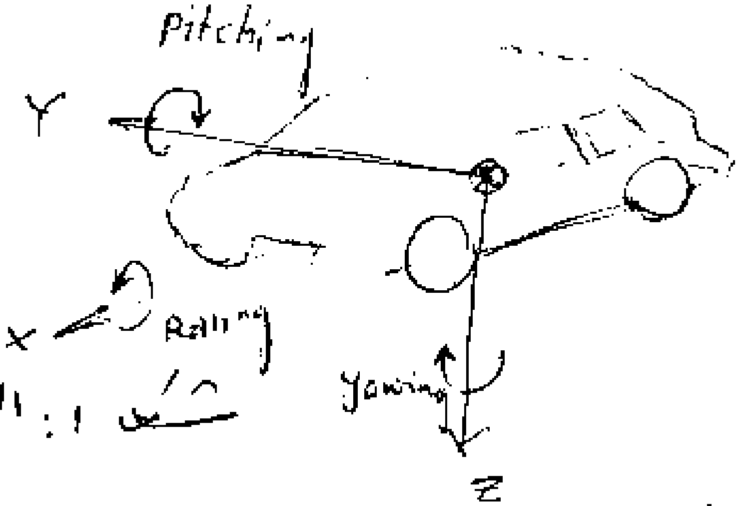
الوحدات 5

المفردات	عدد الأسابيع
1- مقدمة في استدارة السيارة	1
2- نظرية استدارة السيارات	1
3- انقلاب السيارات أثناء الأستدارة	1
4- انزلاق السيارات أثناء الأستدارة	1
5- مسائل في استدارة ، انقلاب وأنزلاق السيارات	2
6- الديناميكيا العرضية	1
7- القوى الجانبية للأطارات – زوايا الأنزلاق والحمل	1
8- التعجيل الجانبي وعزم التصور الذاتي	5
- السلوك الترددي	
- الأهتزازات الحرة	
- سلوكيات المركبة (المحايدة ، السالبة ، الموجبة)	
9- استجابة الأنسان للأهتزازات العمودية	2
- اهتزاز المركبة اذا كانت ذو درجة حرية حركة واحدة	
- الأهتزازات الحرة	
- الأهتزازات العسرية	
10- الأهتزازات لدرجتين من حرية الحركة للسيارات	1
11- السلوك التوافقي لعدم استوائية الطريق	2
12- مقايس العوم والأمان - راحة المسير	1
13- الأهتزاز الشاقولي **Vertcal Vibration**	6
- المعادلات الحركية ، الدوال التحويلية	
- الترددات الطبيعية ، الخصائص الأحصائية	
- تأثير معالم المنظومة	
- تعليق المقاعد على نوابض	
- التركيب على نوابض غير خطية	
14- الأنعطاف – الأهتزاز الأنعطافي **Rolling vibration**	2
- المعادلات الحركية	
- القوى الحركية	
- اهتزاز محاور الدواليب	
- الكثافة الطيفية للقوى الحركية	
15- التأرجح – الأهتزاز التأرجحي **Pitchinh vibration**	1

ديناميك سيارات (1)

X - longitudinal | Y - lateral | Z : vertical





شكل ١ : القوى المؤثرة لسيارة

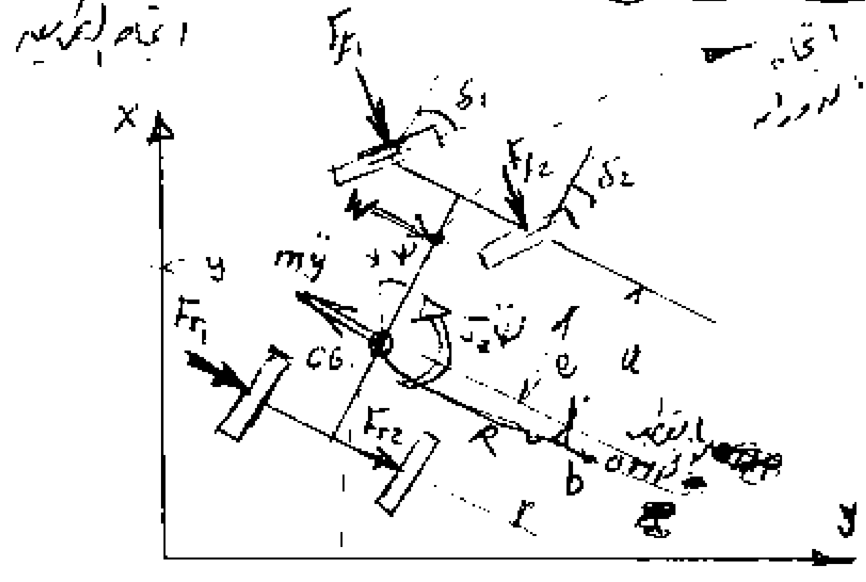
نتيجة سير المركبات الارضية فوق الطرق يحصل لها ست درجات من حرية الحركة الواردة بالشكل اعلاه وهي :

1. الحركة الطولية باتجاه محور X — longitudinal motion
2. الحركة العرضية الجانبية باتجاه Y — lateral motion
3. الحركة العمودية (الاهتزازات) باتجاه Z — vertical motion
4. الحركة المتدحرجة حول X — Rolling motion
5. الحركة الترجحية حول Y — Pitching motion
6. الحركة الانعراجية حول Z — yawing motion

ففي مسألة الديناميكا العرضية التي سنشرحها في هذا الفصل نكتفي بدراسة حركة السيارة الجانبية باتجاه المحور (y) والدوران حول المحور العمودي (z) المار بمركز ثقلها.

أي يكون لجسم السيارة فقط درجتان من حرية الحركة.

* نموذج لاستدارة السيارة في منعطف



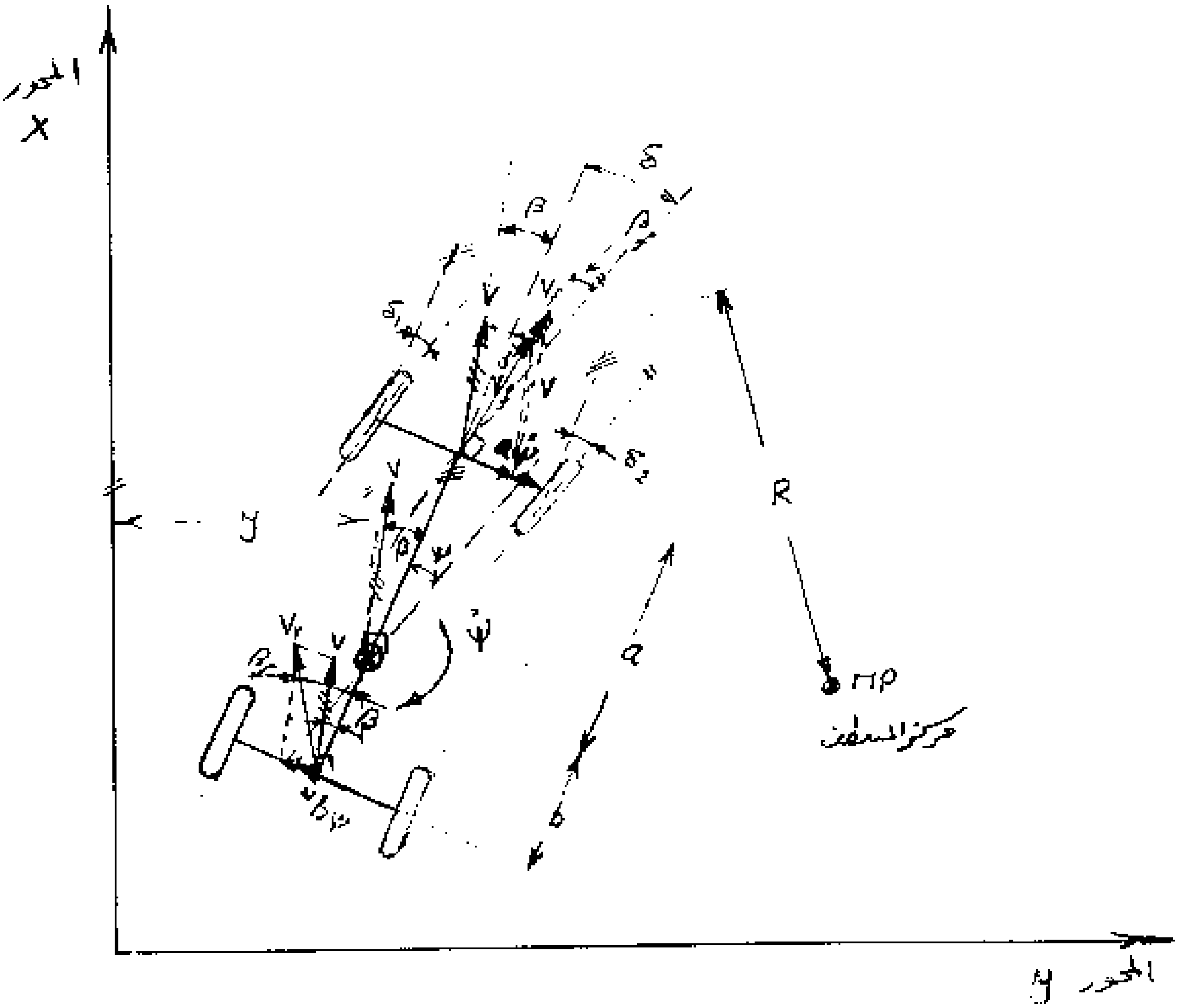
شكل 2: القوى والعزوم المؤثرة في السيارة خلال الاستدارة في منعطف. درجتين من حرية الحركة: الإزاحة الجانبية y والدوران حول مركز الثقل بزاوية ψ.

في الشكل المرقم 2 نشاهد مخططاً علوياً لسيارة تسير للأمام بسرعة u باتجاه المحور x. ونتيجة لتأثير زاويتي استدارة العجلتين الأماميتين (δ_1, δ_2). في حالة الاستدارة في منعطف مثلاً أو نتيجة لتأثير محصلة القوى الجانبية للرياح (W) تتحرك السيارة عمودياً لاتجاه السير (X) بمقدار الإزاحة (y) وتدور حول مركز ثقلها بزاوية ψ.

إن تركيب الحركتين الإزاحية (y) والدورانية (ψ) معاً تسببا استدارة السيارة حول ما يسمى بالقطب الآني (MP) - نصف قطره (R) ونتيجة لذلك تؤثر قوة طاردة مركزية ($m\ddot{y}$) في مركز ثقل السيارة CG. والعزم $J\ddot{\psi}$ حيث:

$\ddot{y}$ - lateral acceleration

m - ~~vehicl~~ vehicle's mass



شكل 3 : المكونات الديناميكية للسرعة في المحور الأمامي V_f والخلفي V_r ، في مركز الثقل V خلال الاستدارة في منعطف ، درجات من حرية الحركة (الزاوية الجانبية β ، والدوران حول مركز الثقل بزاوية ψ)

$$\sin(\alpha) = \alpha \quad [rad]$$
$$\cos(\alpha) = 1$$

يكون ارتفاع مركز الثقل عن الأرض (h) قليلاً . بحيث لا يؤثر عزم القوة الطاردة المركزية ($m\ddot{y}h$) الناتج عن الاستدارة في الحمل على الإطارات الداخلية والخارجية ولا يؤثر في ميلان جسم السيارة .

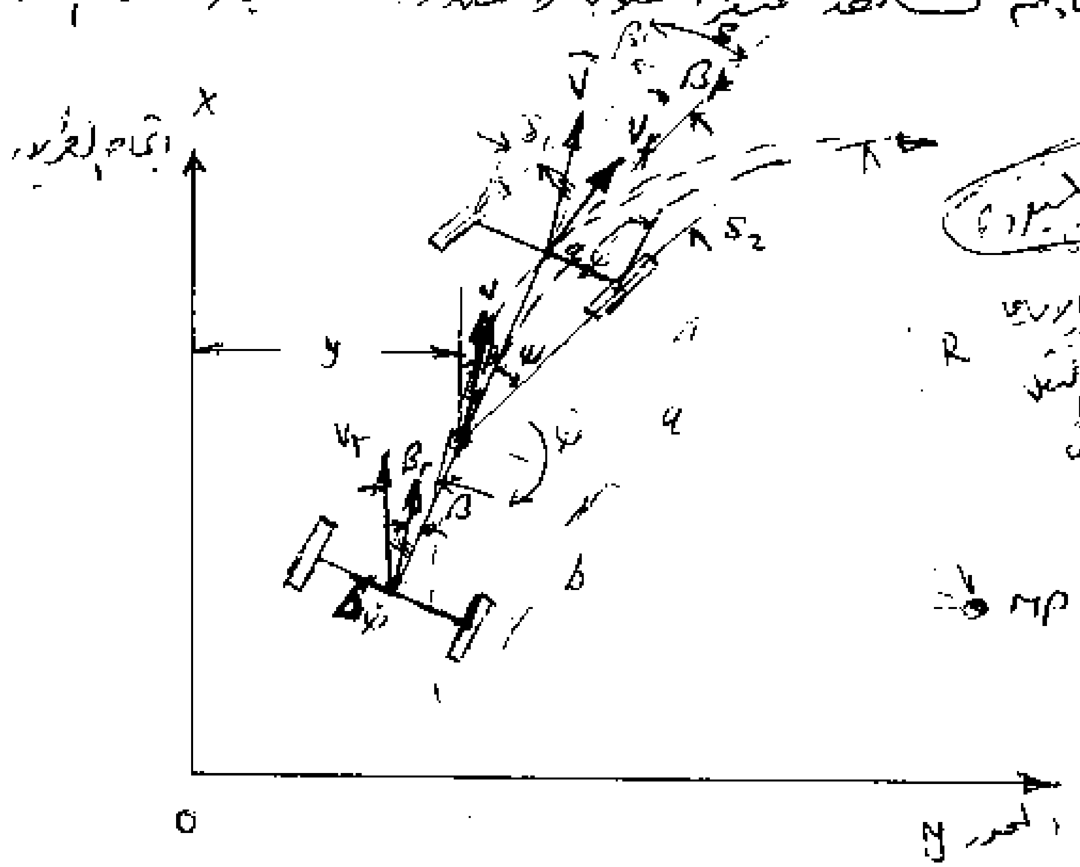
بعد الأخذ بالفرضيات المذكورة أعلاه يمكن كتابة معادلة توازن جميع القوى المؤثرة في الاتجاه العرضي (y) كالآتي :

$$S_f + S_r + W - m\ddot{y} = 0 \quad [N] \quad —(1)$$

وتكون معادلة توازن العزوم حول مركز الثقل (CG)

$$S_f \cdot a - S_r \cdot b + W \cdot e - J_z \ddot{\psi} = 0 \quad [Nm] \quad —(2)$$

في الشكل القادم نشاهد شيئاً عاماً لاستدارة السيارة حول القطب



MP الآتي

إنزياح الثقل في الدوران للسيارة

تشكل :

الإزاحة الطولية للمركبة في المحاور المرجعية V_f والمقدار V في مركز الثقل لا خلال الاستدارة مختلفة ويختلف عن مركبة الكل (الاتجاه العرضي y) والدوران حول مركز الثقل بزاوية (ψ)

(6)

وكذلك الحال للسرعة الخطية في المحور الخلفي V_r

$$\vec{V_r} = \vec{V} + b\dot{\psi}$$

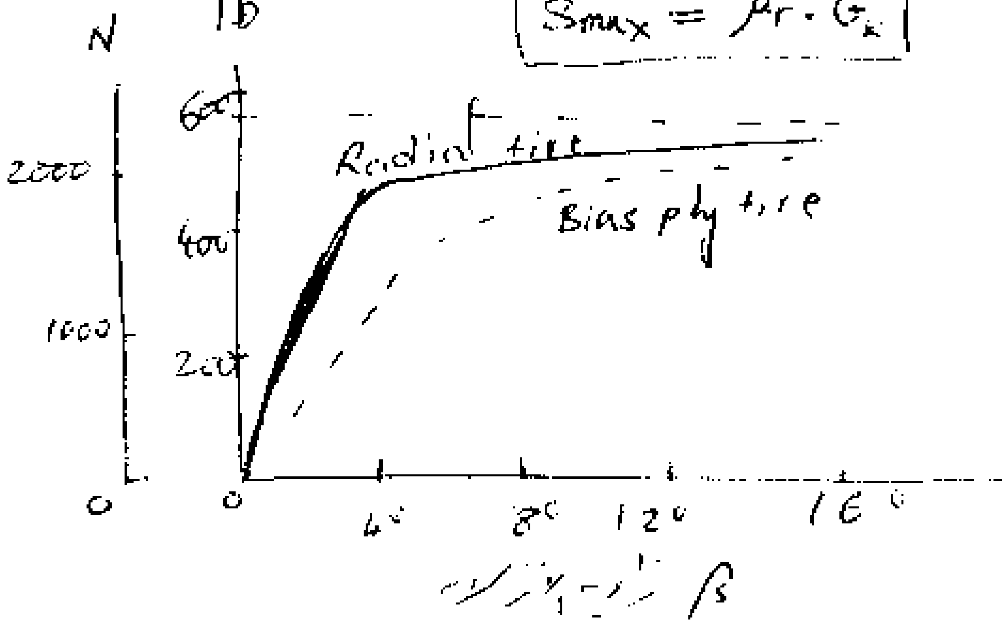
$$\beta_f = \delta + \beta - \frac{a\dot{\psi}}{V} \quad (3)$$

$$\beta_r = \beta + \frac{b\dot{\psi}}{V} \quad (4)$$

※ القوة الجانبية للإطارات ... زوايا الانزلاق والحمل

تتأثر القوة الجانبية للإطار بعدة عوامل منها زاوية الانزلاق والحمل العمودي الناتج من وزن السيارة والمؤثرة على سطح الإطار ... وفي الشكل رقم (4) يوضح العلاقة بين القوة الجانبية (S) وزاوية الانزلاق β في حالة ثبوت الحمل (G_k) لنوعين من الإطارات تزداد القوة (S) بزيادة الزاوية (β) وتبقى العلاقة بينهما خطية الى حدود (4^0) تقريباً وبعدها تزداد القوة بشكل أقل الى ان تصل حدودها القصوى بانزلاق الإطار جانبياً.

$$\boxed{S_{max} = \mu_r \cdot G_k}$$



شكل 4: علاقة القوة الجانبية (S) بالحمل العمودي (G_k) وزاوية β

حيث ان — مسافة الانتقال بين الاطار والطريق .

اذا كانت زوايا الانزلاق قليلة المقدار أمكن عندئذ كتابة المعادلتين الآتيتين للمحورين الأمامي والخلفي :

القوة الجانبية للاطارات الامامية

$$S_f = C_{xf} \cdot \beta_f \quad [N] \tag{5}$$

$$S_r = C_{xr} \cdot \beta_r \quad [N] \tag{6}$$

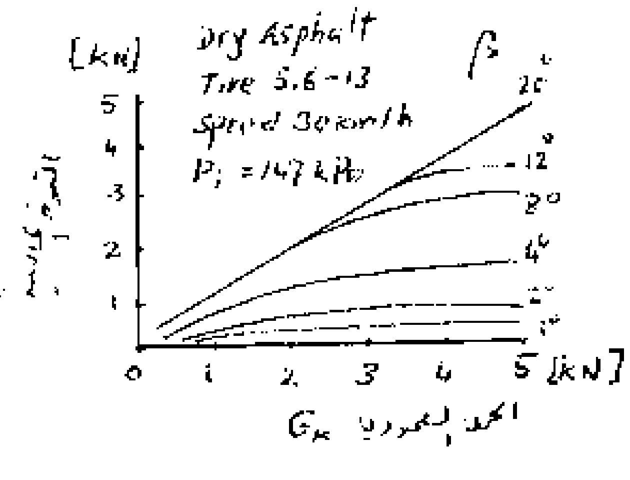
C_{xf} - الصلابة الجانبية للاطار الامامي [N/rad]

C_{xr} - ، ، للخلفي [N/rad]

β_f, β_r [rad]

---

* اما الشكل 5 نشاهد العلاقة بين القوة الجانبية (S) والحمل (G_K) في حالة ثبوت زاوية الانزلاق β . يتضح من الشكل ان العلاقة بينهما غير خطية وخاصة للزوايا القليلة المقدار . لذلك فان تأثير الحمل المختلف في الاطارات الخارجية عنها في الاطارات الداخلية نتيجة للاستدارة في منعطف سيؤثر في توزيع القوتين الجانبيتين S_r ، S_f بشكل جذري وعكسه اعتبارهما ثابتتين في حالة ثبوت زاويتي الانزلاق β_f ، β_r .



شكل 5 : علاقة القوة الجانبية للاطار (S) بالحمل العمودي G_K في حالة ثبوت زاوية الانزلاق β .

(٢) التعجيل الجانبي وعزم القصور الذاتي

حالة استدارة السيارة حول المنعطف (انظر الشكل ٤) تتحرك عمودياً على اتجاه الطريق (المحور x) بمقدار الإزاحة (dy) وتقطع مسافة (ds). وإذا كان نصف قطر الاستدارة (R) كبيراً نسبياً أمكن إيجاد العلاقة بين التعجيل الجانبي ($\ddot{y}$) وسرعة زاوية الدوران والانزلاق في مركز الثقل كالآتي:

$$y = \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \dot{y} \times \frac{1}{V}$$

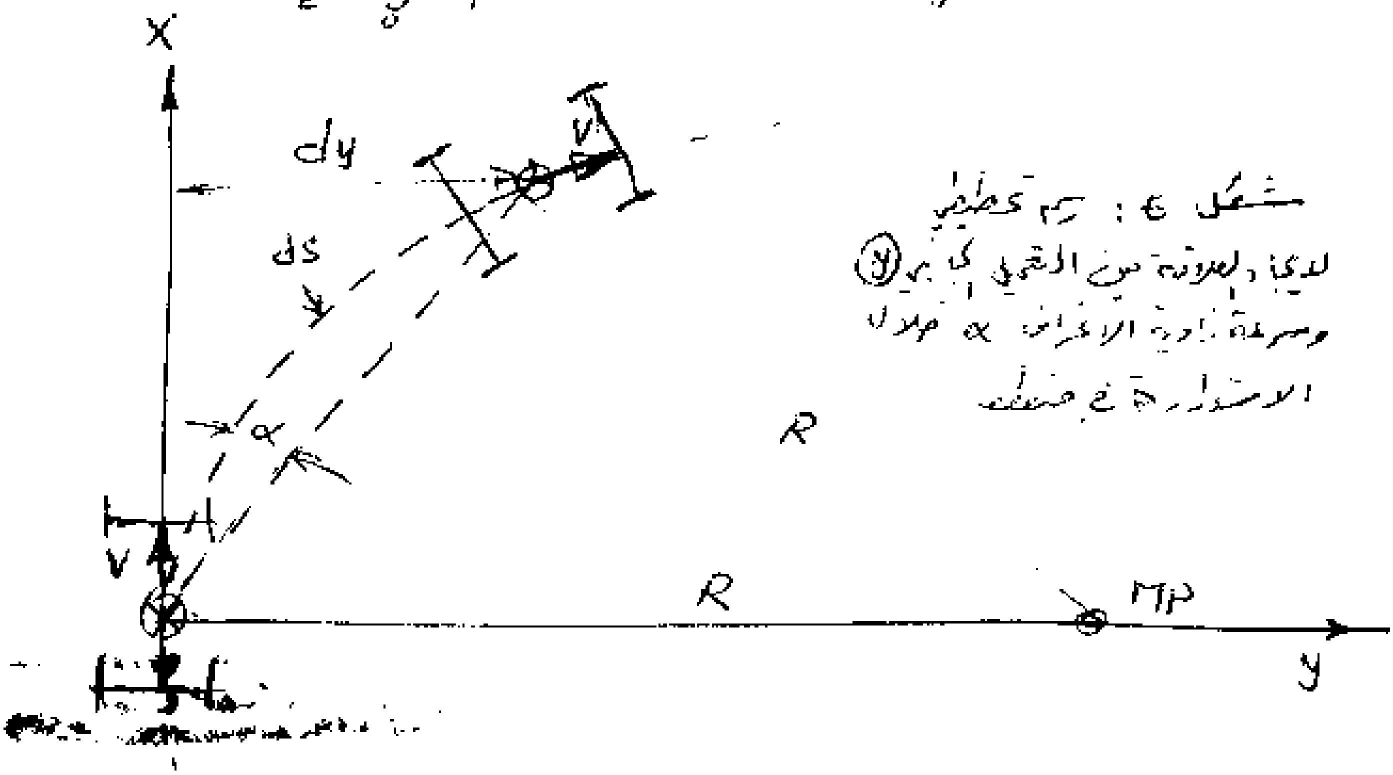
$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{y} \times \frac{1}{V}\right) = \ddot{y} \times \frac{1}{V}$$

$$\therefore \left[\ddot{y} = \dot{y} \times V = (\dot{\psi} - \beta) \times V \quad [m/s^2] \text{ --- } (7)\right]$$

* عزم القصور الذاتي

ان عزم القصور الذاتي (J_z) حول المحور المار بمركز الثقل هو مقياس لمقدار كتلة السيارة وكيفية توزيعها وهو عبارة عن مجموع حاصل ضرب جميع الكتل بمربع أبعادها عن محور الدوران (z) ويمكن كتابته بالمعادلة الآتية

$$J_z = \int_0^m r_i^2 \, dm = r^2 \times m \quad [kg \cdot m^2] \text{ --- } (8)$$



شكل ٤ : يمثل مخطط لايجاد العلاقة بين التعجيل الجانبي ($\ddot{y}$) وسرعة زاوية الانزلاق α خلال الاستدارة في منعطف

(مخطوطة ...)

⑨.. وتعين تقدير قيمة نصف القطر r للسيارات الاعتيادية ذات المحرك الأمامي والدفع الخلفي. حيث تتمركز الكتل في مقدمة ومؤخرة السيارة من المعادلة الآتية

$$r = \frac{1}{2}(a+b) \quad [m]$$

أي أنه يساوي نصف المسافة الواقعة بين المحورين الأمامي والخلفي.

اما بالنسبة لسيارات السباق ذات المحرك الوسطي تكون قيمة (r) أقل مما هو عليه في القيمة للسيارات نظراً لتمركز الكتل في منتصف السيارة.

إذن كلما كانت الكتل بعيدة عن مركز الثقل ازداد بذلك نصف قطر عزم القصور الذاتي (r).

* السلوك الترددي

نعوض المعادلات من (3 ← 8) في المعادلتين ① ، ②

نستنتج أن:

$$C_{\alpha f}\left(\delta+\beta-\frac{a\dot{\psi}}{V}\right) + C_{\alpha r}\left(\beta+\frac{b\dot{\psi}}{V}\right) + W + mV(\dot{\psi}-\dot{\beta}) = 0 \quad — (9)$$

&

$$C_{\alpha f}\left(\delta+\beta-\frac{a\dot{\psi}}{V}\right)\cdot a - C_{\alpha r}\left(\beta+\frac{b\dot{\psi}}{V}\right)\cdot b + W\cdot e - mr^2\ddot{\psi} = 0 \quad — (10)$$

- المتغيرات في المعادلتين هي $(W ، \psi ، \beta)$
- الثوابت هي: $C_{\alpha f}$ ، $C_{\alpha r}$ ، a ، b ، e ، r .

Using Laplace transform on the above equs (9, 10), & after using

$$\psi = \psi_0 e^{pt}, \quad \dot{\psi} = \psi_0 p e^{pt}, \quad \ddot{\psi} = \psi_0 p^2 e^{pt}$$

$$\beta = \beta_0 e^{pt}, \quad \dot{\beta} = \beta_0 p e^{pt}$$

$$\delta = \delta_0 e^{pt}$$

$$W = W_0 e^{pt} \quad \text{where } p = i\omega, \quad i = \sqrt{-1}$$

ψ_0 ، β_0 ، δ_0 ، W_0 = سعة المتغيرات

وبعد الاختصار وفصل المتغيرات عن الثوابت والتعويض عن قيمة الأرقام من المعادلة ⑨ و ⑩ نستنتج المعادلة التي تعطي النسبة بين الاستجابة سرعة الدوران ($\dot{\psi}_0$) وسعة زاوية التوجيه (δ_0) والقوة الخارجية (W_0).

$$\dot{\psi}_0 \cdot r^2 m^2 \cdot V\left[P^2 + A_1 P + B_1\right] = \delta_0\left[A_2 P + B_2\right] + W_0\left[A_3 P + B_3\right] \quad \text{—(11)}$$

حيث

$$A_1 = \frac{1}{mvr^2}\left[C_{\alpha f}(a^2 + r^2) + C_{\alpha r}(b^2 + r^2)\right] \quad \text{—(12)}$$

$$A_2 = mva \cdot C_{\alpha f} \quad \text{—(13)}$$

$$A_3 = mvW \quad \text{—(14)}$$

$$B_1 = \frac{1}{m^2 v^2 r^2}\left[C_{\alpha f} C_{\alpha r}(a+b)^2 + mv^2(bC_{\alpha r} - aC_{\alpha f})\right] \quad \text{—(15)}$$

$$B_2 = C_{\alpha f} C_{\alpha r}(a+b) \quad \text{—(16)}$$

$$B_3 = C_{\alpha f}(e-a) + C_{\alpha r}(e+b) \quad \text{—(17)}$$

ان زاوية استدارة العجلتين الأماميتين (δ) هو تأثير داخلي على حركة السيارة ناتج عن تحريك دولاب القيادة (السائق). أما قوة الريح الجانبية (W) فهي تأثير خارجي على جسم السيارة وعلى حركتها.

عليه نعتبر التأثير الداخلي والخارجي معاً دخلاً للمنظومة ونستخدم رمزهم اليمين للمعادلة (11).

(δ, W) - system input

أما سرعة الدوران ($\dot{\psi}$) الذي تشكل الكمية اليسرى من المعادلة (11) فتعتبر خرجاً للمنظومة ناتج من التأثيرين الداخلي والخارجي معاً أو بشكل منفصل

$\dot{\psi}$ - system output

$$\underset{\text{input}}{\boxed{\delta, W}} \longrightarrow \underset{\text{output}}{\boxed{\dot{\psi}}}$$

(11) ※ الاهتزازات الحرة

اذا اثرت على السيارة اثناء سيرها بسرعة عالية على طريق مستو ولفترة محدودة من الزمن قوة ما (كالرياح الجانبية مثلا) او تحريك دولاب القيادة ، نلاحظ انها تدور حول نفسها بشكل ترددي الى ان يضمحل اهتزازها تدريجيا بعد قضاء فترة زمنية معينة ، وتكون هذه الاهتزازات مستمرة في الوجود حتى بعد اضمحلال التأثيرات الداخلية والخارجية عليها لذلك يمكن تسميتها بالاهتزازات الحرة .

نجعل الطرف الايمن للمعادلة (11) مساويا للصفر نحصل على ما يسمى بالمعادلة التفاضلية المتجانسة ونرمز لها بالمعادلة المميزة .

$$\psi_0 \cdot r^2 \cdot m^2 \cdot v \left[P^2 + A_1 P + B_1 \right] = 0 \qquad \text{— (18)}$$

وتتحقق هذه المعادلة اما بـ $\psi_0 = 0$

او بـ

$$\left(P^2 + A_1 P + B_1 = 0 \right)$$

$$P_{1,2} = \frac{-A_1 \mp \sqrt{A_1^2 - 4B_1}}{2}$$

$$P_{1,2} = -\frac{A_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A_1}{2}\right)^2 - B_1} \qquad \text{— (19)}$$

ويمكن كتابة المعادلة السابقة بالشكل الآتي :

$$P_{1,2} = -\frac{A_1}{2} \pm i\sqrt{B_1} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{A_1}{2\sqrt{B_1}}\right)^2} \qquad \text{— (19)}$$

$$= -\xi\omega_n \pm i\omega_n \sqrt{1-\xi^2}$$

$$= -\xi\omega_n \pm i\omega_d$$

حيث ان $\omega_n = \sqrt{B_1}$ يمثل التردد الطبيعي غير المخمد [rad/sec]

$\xi = \frac{A_1}{2\sqrt{B_1}}$ يمثل معامل التخميد

$$\left[\ \left|\frac{\dot{\psi}_0}{\delta_{L_0}}\right| = \frac{1}{m^2 \cdot r^2 \cdot V \cdot i_s}\sqrt{\frac{(A_2\omega)^2 + B_2^2}{(B_1-\omega^2)^2+(A_1\omega)^2}}\ \right] \quad [1/\sec] \quad (22)$$

(14)

حيث A_1 ، B_1 ، A_2 ، B_2 معروفة وتحسب من معادلات (12) و (15) ، (13) ، (16) على التوالي والمذكورة سابقاً

مثال / $\boxed{H \cdot W}$

المطلوب إيجاد العلاقة الترددية لنسبة $\left|\frac{\dot{\psi}_0}{\delta_{L_0}}\right|$ للسيارة صالون ذات محرك أمامي ودفع خلفي وبالمعطيات الآتية :

$a = 1.24\,[m]$; $b = 1.46\,[m]$

- الحيادة الجانبية للإطارين الأماميين ($C_{\alpha f} = 80000\ N/rad$)
- الحيادة الجانبية للخلفيين ($C_{\alpha r} = 80000\ N/rad$)
- كتلة السيارة $m = 1250\,[kg]$
- نصف قطر عزم القصور الذاتي حول المحور $r = 1.35\,[m]$
- نسبة التحويل في آلية القيادة $i_s = 20$
- سرعة المركبة الخطية في مركز الثقل $v = 40\ m/s$

$\boxed{\text{مناقشة الحل}}$ بعد تعويض الثوابت المذكورة في المثال في المعادلة (22) وبرنامج بتغير التردد من $[0.01\,HZ \rightarrow 10\,HZ]$ نحصل على كل مجموعة من المنحنيات لدراسة تأثير معطيات المركبة أعلاه .

$$1\,HZ = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow \omega = 1\,HZ * 2\pi$$

$$0.1\,HZ = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow \omega = 0.1 * 2\pi$$

وتوضع مجموعة قيم للتردد لنحصل على مجموعة قيم لنسبة $\left|\frac{\dot{\psi}_0}{\delta_{L_0}}\right|$ للسرعة المعطاة .

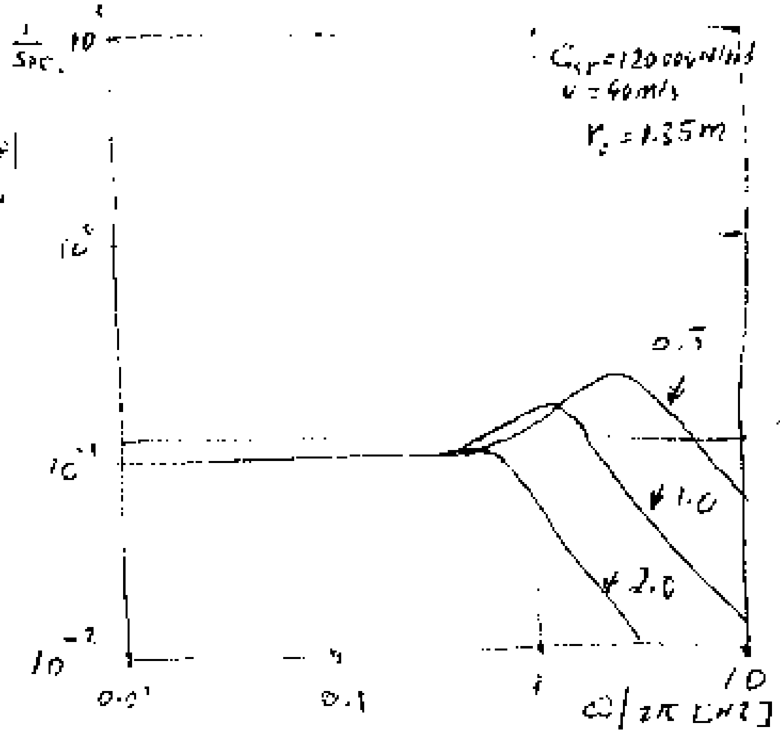
(*) وعلى أخذ تأثير السرعة على مسار المنحني (السرعة الخطية) فإذا أخذنا مجموعة قيم للسرعة الخطية تتراوح من $10\ m/s \leftarrow 60\ m/s$ نحصل على مجموعة من المنحنيات تبين تأثير السرعة في قيم $\left|\frac{\dot{\psi}_0}{\delta_{L_0}}\right|$ وخصوصاً في منطقة التردد الطبيعي ($\sqrt{B_1}$) حيث تزداد النسبة بزيادة السرعة الخطية وهذا يعني أن السيارة بالسرعة العالية أقل استقرارية .

• تأثير الجساءة الجانبية للإطارات $C_{\alpha f}$ ، $C_{\alpha r}$

عند دراسة تأثير الجساءة الجانبية للإطارات الأمامية والخلفية على نسبة السعة المطلقة $\left|\frac{\dot{\psi}_o}{S_{fo}}\right|$ من خلال المعادلة (22) نجد أنه إذا أخذنا قيم الجساءة الجانبية $\frac{C_{\alpha f}}{C_{\alpha r}}$ من (0.5 ← 2.0) لسرعة خطية ثابتة مقدارها (40m/s) ولقيم ترددات مختلفة ومحصورة (0.01 ← 10Hz) سنجد أن نسبة سرعة الدوران تزداد بزيادة النسبة $\frac{C_{\alpha f}}{C_{\alpha r}}$ في جميع الترددات وخاصة في مجال التردد الواطئ وبهذا تزداد قيمة الجساءة الجانبية للإطارات بزيادة ضغط الهواء الداخلي لها .

• تأثير نصف قطر عزم القصور الذاتي (r)

ويشاهد تأثير تغير نسبة نصف قطر عزم القصور الذاتي (r/r_o) من (0.5 — 2.0) على السعة ويكون هذا التأثير واضحاً في مجال التردد العالي



ومن هنا نجد نسبة السيطرة والتوجيه الملاحظة حيث تقل نسبة السعة بزيادة نصف القطر (r) وهذا يعني أن معظم السيارات التي يكون فيها عزم القصور الذاتي قليلاً تتأثر أكثر وخاصة المركبات في مجال السيارات الصغيرة وعند استخدام السيارات الرياضية والتي تتطلب السيارة سرعة ومرونة في السيطرة .

* التردد الطبيعي ومعامل التخميد :

– التردد الطبيعي غير المخمد

التردد الطبيعي العرضي للسيارة :

هو تردد الحركة الدورانية التي تهتز بها السيارة في حالة التأثير عليها
بشكل مجازي ولفترة قصيرة من الزمن اما بواسطة عجلة القيادة او بتأثير
قوة خارجية وفي حالة الاضطرابات الحرة المذكورة سابقا .

∴ The undamped natural frequency (ω_n) is:

$$\omega_n = \sqrt{B_1} = \frac{1}{mvr}\sqrt{C_{\alpha f}C_{\alpha r}(a+b)^2 + mv^2(bC_{\alpha r} - aC_{\alpha f})} \quad [rad/sec] \qquad (23)$$

وتعتمد علاقة التردد الطبيعي غير المخمد (ω_n) بسرعة المركبة (V) على
شكل القوس تحت الجذر ($bC_{\alpha r} - aC_{\alpha f}$)

There are three cases:

1) positive case $(bC_{\alpha r} - aC_{\alpha f}) > 0$

تكون العلاقة بين ω_n و V علاقة عكسية حيث تقل التردد الطبيعي غير المخمد
بزيادة السرعة . (تظهر هذه الحالة في السيارات الاعتيادية ذات الجزء الامامي والمحرك الامامي ...
للحالات ... $(a<b)$

2) Zero case $(bC_{\alpha r} - aC_{\alpha f}) = 0$

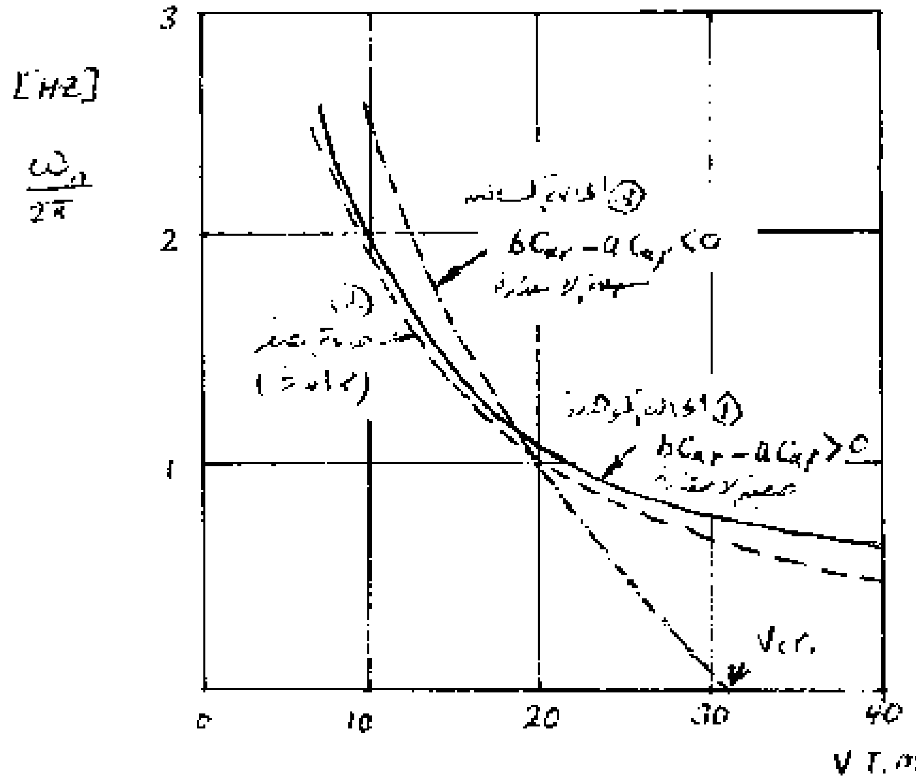
تكون العلاقة بين (ω_n) و (V) عكسية ايضا ومن بداية الاكثار ...
باستمرار ... قيمة (ω_n) تكون ...

3) Negative case $(bC_{\alpha r} - aC_{\alpha f}) < 0$

تكون العلاقة بين (ω_n) و (V) عكسية كذلك وهو من الممكن ان تصل التردد
الطبيعي غير المخمد الى الصفر عند سرعة معينة تسمى بالسرعة الحرجة V_{cr}
وهذا يعني ان الحركة الدورانية تتحول الى حركة لا ذبذبية كما هو ظاهر في المعادلة
(20) . حيث اعدنا التعويض عن ($\omega_n = 0$) تكون سرعة الاستقرار ...

وتعينه $\left[\omega_n = C + D\right]$ من وضع المعادلة 20 - وتنطبق هذه الحالة على جميع السيارات ذات المحرك الخلفي والدفع الخلفي حيث يكون موقع مركز الثقل قريباً من المحور الخلفي $(a > b)$.

والشكل 8 يوضح العلاقة بين (ω_n) و (V) لحالات العلاقة المذكورة أعلاه



شكل 8

علاقة التردد الطبيعي غير المخمد بالسرعة لأنواع السيارات الثلاث .

[1] $a = 1.24\,m \quad b = 1.46\,m$
$C_{af} = 80000 = C_{ar}$ [N/rad]

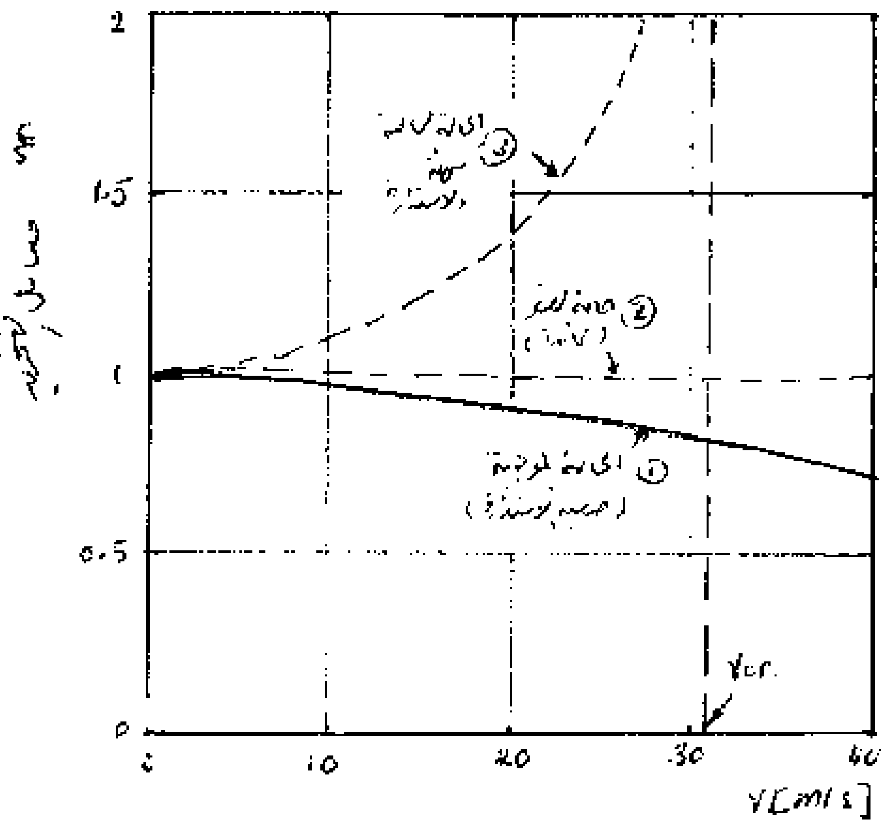
[2] $a = 1.35\,m, \; b = 1.35\,m$
$C_{af} = C_{ar} = 80000$ [N/rad]

[3] $a = 1.24\,m \; , \; b = 1.46\,m$
$C_{af} = 160000$ [N/rad] &
$C_{ar} = 80000$ [N/rad]

- معامل التخميد ζ : ان معامل التخميد هو مقياس لكيفية اضمحلال الاهتزازات العرضية بمرور الزمن

$$\zeta = \frac{A_1}{2\sqrt{B_1}} = \frac{C_{af}(a^2 + r^2) + C_{ar}(b^2 + r^2)}{2r\sqrt{C_{af}C_{ar}(a+b)^2 + mV^2(bC_{ar} - aC_{af})}} \quad (24)$$

وهناك علاقة بين معامل التخميد (ζ) وسرعة المركبة (V) كما يوضحها لنا الشكل 9 القادم



شكل 9 مرتجة

معامل التوجيه بالسرعة للانواع الثلاث المذكورة في الشكل 9.

- تعتمد درجة ξ على ب V كما نرى في شكل 9 ايضاً على قيمة المقدار المعروف بـ (المعروف) $(bC_{\alpha r} - aC_{\alpha f})$ في المعادلة (24)

[1] Positive case $(bC_{\alpha r} - aC_{\alpha f}) > 0$

ξ decreases when V increases (slowly) see (Fig 9)

وهذا يعني ان نسبة الاهتزازات الزاوية تزداد في السرع العالية ويصل معامل التوجيه الى الصفر عندما $(V=\infty)$ فقط وتسمى هذه الحالة (ناقص التوجيه).

[2] Zero case $(bC_{\alpha r} - aC_{\alpha f}) = 0$

ξ will be constant and is equal to 1

$\xi = 1$

اي انه لا دلالة لسرعة السيارة (V) وتسمى هذه الحالة بالتوجيه الصحيح وهي حالة الـ التفاصل بين الحركتين الانتقالية والدورانية.

3 Negative case $(bC_{\alpha r} - aC_{\alpha f}) < 0$

وشكل أيه
ξ increases ⟶ when V increases
وتصل قيمة ξ الى ما لا نهاية عند سرعة الحرجة $V_{cr.}$
at $V_{cr.}$ → ξ will be infinity
وتسمى هذه الحالة بزائد التخميد وتكون الحركة اللاذبذبية .

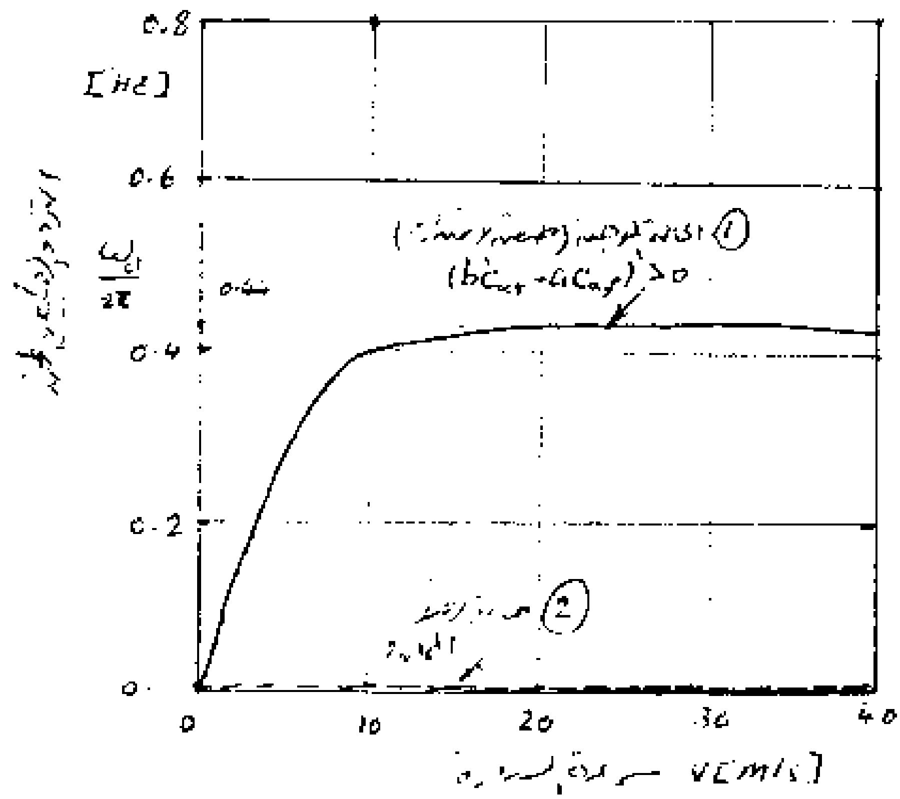
(*) التردد الطبيعي المخمد ω_d

وهو التردد الحقيقي للاهتزازات العرضية الحرة لمعظم السيارات
لأن معامل التخميد فيها يكون كبيراً من الصفر الواحد $(0 < \xi < 1)$
ولذلك يصبح حلاً للمعادلة (20) من النوع ذبذبي ويكون عندئذ
التردد الطبيعي المخمد

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = \frac{2\pi}{T} \quad [rad/s] \quad — (25)$$

حيث T هو زمن الذبذبة [sec] - أنظر الشكل (7) .
من الشكل 10 المقدم توضح العلاقة بين (ω_d) و (V) محسوبة من
الشكلين 8 و 9 بالاستعانة بالمعادلة (25) . ويمكن التمييز بين
الحالات الآتية :

(1) الحالة الموجبة $bC_{\alpha r} - aC_{\alpha f} > 0$
يكون (ω_d) قليل التغير في السرعة الواطئة ثم تزداد الى مقدار ثابت
تقريباً (0.44 Hz) بزيادة السرعة لذلك يمكن اعتباره ثابتاً لمعظم السيارات
الاعتيادية في مجال السرعة المتوسطة والسرعة العالية .



الشكل ١٥:
منحنى التردد الطبيعي المخمد
مع سرعة العربات المذكورة
في [illegible] علماً
تكون التردد الطبيعي المخمد
الحالة الثالثة ③ صفراً
[illegible] (الاطلاع [illegible])

② Zero case $(bC_{xr} - aC_{xf}) = 0$ حالة الصفر

يكون ($\omega_d = 0$) لأن معامل التخميد (ζ) يساوي المقدار ① في هذه الحالة [illegible] (2ζ).
ونسبة لـ ω_d [illegible] السرعة وتكون الحركة عديمة التذبذب.

[illegible] $(bC_{xr} - aC_{xf})$ [illegible]
[illegible] قيمة التردد الطبيعي المخمد لأن معامل التخميد (ζ) [illegible]
أكبر من الواحد [illegible] (2ζ) [illegible] (ω_d)
[illegible] الحركة عديمة التذبذب.

إلى صفحة ٢١/٢٢

(*) الحالة عديمة التذبذب

في حالة تثبيت عجلة القيادة بزاوية معينة (δ_L) وعدم تغيرها تستدير المركبة حول نقطة ثابتة (مركز الدائرة) ويشترط ان تكون سرعة المركبة ثابتة ايضا. تسمى هذه الحالة بالحركة عديمة التذبذب اي لا توجد هنا اية حركة ترددية لعجلة القيادة وتكون سرعة الدوران حول المحور عمودية التردد ايضا ثابتة.

ويمكن الحصول على نسبة السعة للحالة اللاتذبذبية بسهولة بعد جعل تردد عجلة القيادة في المعادلة (22) مساوية للصفر $(\omega=0)$ وبذلك تبسط هذه المعادلة الى الآتي

$$\left|\frac{\dot{\psi}_2}{\delta_{L_0}}\right| = \frac{1}{m^2 \cdot r^2 \cdot V \cdot i_s} \sqrt{\frac{(A_2\omega)^2 + B_2^2}{(B_1-\omega^2)^2+(A_1\omega)^2}} \quad \text{—(22)}$$

تذكير

بعد التعويض $\omega=0$ فيها تصبح

$$\left|\frac{\dot{\psi}_2}{\delta_{L_0}}\right| = \frac{1}{m^2 \cdot r^2 \cdot V \cdot i_s} * \frac{B_2}{B_1}$$

when $\omega=0$

$$\therefore \left|\frac{\dot{\psi}_2}{\delta_{L_0}}\right| = \frac{1}{m^2 \cdot r^2 \cdot V \cdot i_s} * \frac{C_{\alpha f} C_{\alpha r}(a+b) * m^2 \cdot V^2 \cdot r^2}{\left[C_{\alpha f} C_{\alpha r}(a+b)^2 + mV^2(bC_{\alpha r} - aC_{\alpha f})\right]}$$

$$\therefore \left|\frac{\dot{\psi}_0}{\delta_{L_0}}\right| = \frac{V \cdot C_{\alpha f} \cdot C_{\alpha r}\,(a+b)}{i_s\left[C_{\alpha f} \cdot C_{\alpha r}\,(a+b)^2 + mV^2(bC_{\alpha r} - aC_{\alpha f})\right]} \quad \text{—(26)} \; [1/\mathrm{sec}]$$

وبذلك نناقش المعادلة الماخوذة (26) بحالات ثلاث

① positive case $(bC_{\alpha r} - aC_{\alpha f}) > 0$

تزداد نسبة السعة لسرعة الدوران بتزايد السرعة الخطية الى ان تصل حدها الأقصى في ما يسمى بالسرعة الحرجة (V_{ch}) ثم تقل تدريجيا الى ان تصل الصفر عندما $V=\infty$.

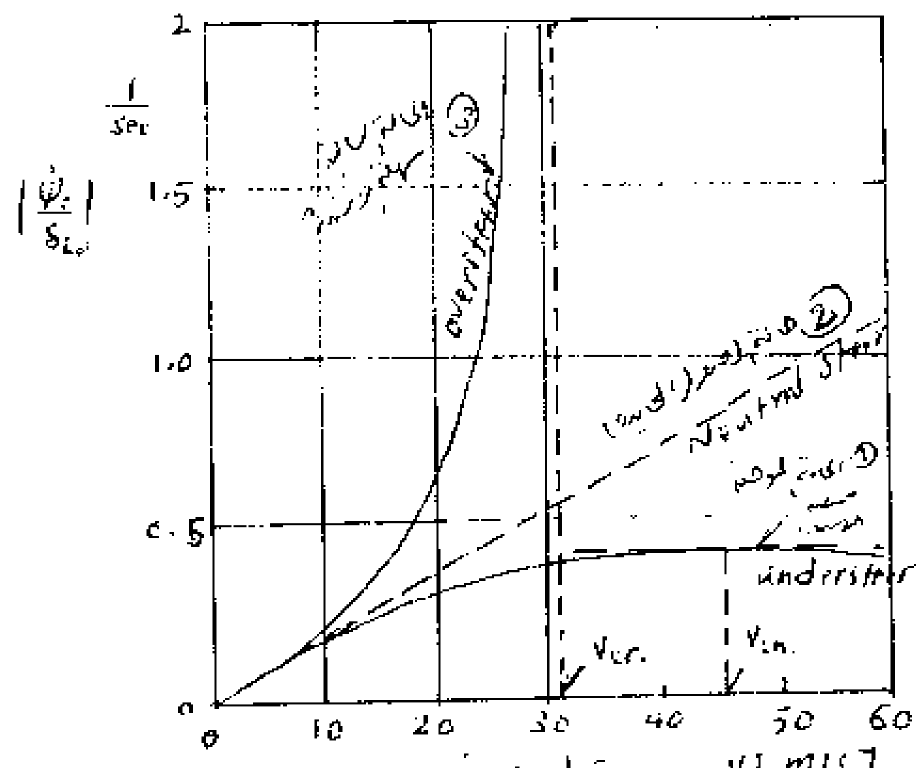
ولايجاد السرعة المميزة (Vch.) نفاضل المعادلة (26) ونساويها بالصفر.

$$\frac{\partial \left| \frac{\dot{\psi}}{\delta_{L_0}} \right|_0}{\partial V} = 0$$

H.W. اشتقاق مفصل

لمقدار مشتقاته والتبسيط نحصل على

$$V_{ch.} = \sqrt{\frac{C_{\alpha f} C_{\alpha r} (a+b)^2}{m(b C_{\alpha r} - a C_{\alpha f})}} \qquad (27)$$



شكل (11) يوضح
نسبة السعة لسرعة الدوران الى
زاوية عجلة القيادة بالسرعة
للحالات الثلاث
المذكورة سابقاً.
في شكل (8)

ملاحظة: معطيات الحالة الاولى في الشكل (8) في المعادلة (27) نحصل على

$$V_{ch} = 46.05 \; [m/s] \simeq 166 \, km/h$$

وعند التعويض عن V_{ch} في المعادلة (26) نجد أن

$$\left|\frac{\dot{\psi}}{\delta_{L_0}}\right|_{max.} = 0.427 \quad [1/sec]$$

وتسمى هذه الحالة بذلك كون السيارات المعمرة استقرارية (understeer) وينطبق هذا على جميع السيارات ذات المحرك الأمامي والدفع الخلفي او ذات المحرك الأمامي والدفع الأمامي (a<b).

(2) Zero case $bC_{\alpha r} - aC_{\alpha f} = 0$

تتحول المعادلة (26) الى المعادلة البسيطة الآتية :

$$\left|\frac{\dot{\psi}_o}{\delta_{io}}\right| = \frac{V}{i_s\,(a+b)} \qquad (28)$$

ومنها نلاحظ من المعادلة (28) ان العلاقة خطية بين $\left|\frac{\dot{\psi}_o}{\delta_{i}}\right|$ و V

انظر شكل 11 . وتسمى هذه الحالة بالحالة المحايدة Neutral Steer

لانها تمثل الحد الفاصل بين السيارات الضعيفة الاستدارة والسيارات حادة الاستدارة

(3) Negative case $bC_{\alpha r} - aC_{\alpha f} < 0$

تزداد نسبة السعة شيئاً فشيئاً مع تزايد السرعة وتصل الى مقادير هائلة (∞) وتحسب من هذه الحالة V_{cr}

وتحسب V_{cr} عندما يؤول مقام المعادلة (26) مساوياً للصفر

$$i_s\left[C_{\alpha f}C_{\alpha r}(a+b)^2 + mV^2(bC_{\alpha r} - aC_{\alpha f})\right] = 0$$

H.W حيث نستنتج ان

$$V_{cr} = \sqrt{\frac{C_{\alpha f}C_{\alpha r}(a+b)^2}{m(aC_{\alpha f} - bC_{\alpha r})}} \qquad (29)$$

عند التعويض عن قيم الحالة (3) في شكل (8) في المعادلة اعلاه نجد ان

$$V_{cr} = 30.25\ [m/sec] = 109\ (km/h)$$

وهي السرعة الحرجة التي تكون فيها سرعة الاستدارة مساوية لـ ∞

$$\left(\left|\frac{\dot{\psi}_o}{\delta_i}\right|_o = \infty\right)$$

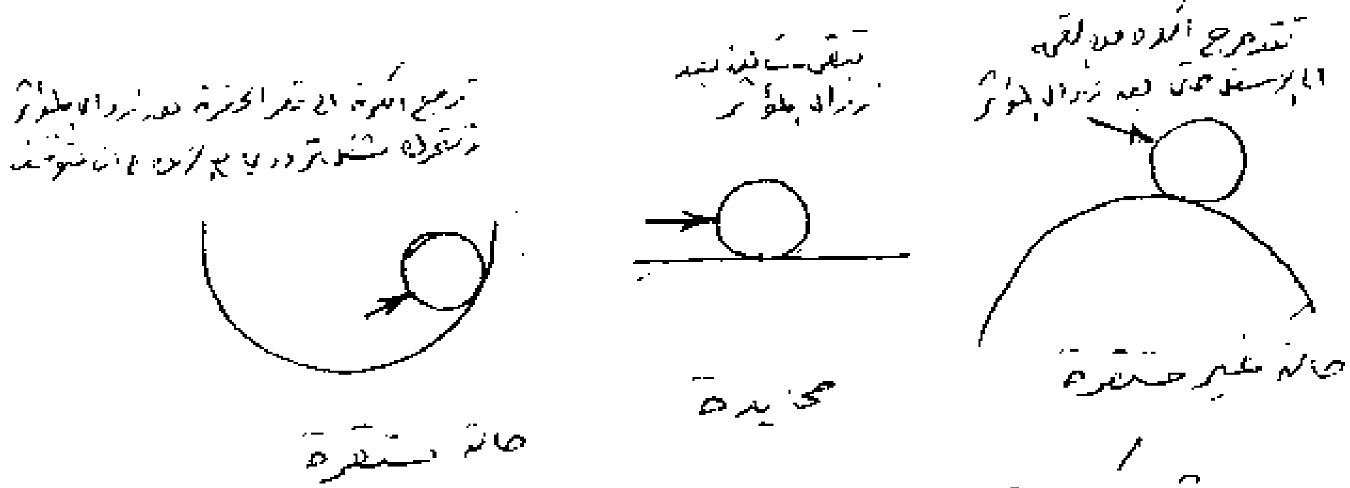
وتسمى هذه الحالة لذلك بحالة السيارات سهلة الاستدارة (oversteer)

وتنطبق على جميع السيارات ذات المحرك الخلفي والدفع الخلفي التي عادة يكون مركز ثقلها قريباً من المحور الخلفي $a > b$

ملاحظة من الناحية العملية يمكن تغير حالة المرآة من الحالة ① الى الحالة ② او الحالة ③ وذلك بتغير موقع الثقل (بالتحميل مثلاً) او بتغير خواص المادة (كتغير المادة او تغير الضغوط المسلطة.

* تحليل الاستقرارية

اذا اثرت قوة خارجية في جسم ما لفترة قصيرة من الزمن وسببت انحرافاً فيه واذا اضمحل هذا التأثير بمرور الزمن بعد زوال المؤثر كان الجسم مستقراً.
واذا ازداد الانحراف بمرور الزمن كان غير مستقراً.
واذا ~~استجاب~~ استجاب الجسم للتأثير وبقي على حاله كان محايداً.



شكل 12 : مثال مبسط لتوضيح استقرارية الاجسام بصورة عامة

* تحديد الاستقرارية بوساطة معامل التخميد

تطرقنا سابقاً الى العلاقة الزمنية لسرعة الدوران ($\dot{\psi}$) تتغير بتغير معامل التخميد (ζ) من المعادلة (20) ومن الشكل 7 شاهدنا هذه العلاقة.
يمكننا من تحديد الاستقرارية وذلك من خلال التمييز بين الحالات الثلاث الآتية.

(A) $0 < \zeta < 1$: تكون السيارة مستقرة وتضمحل اهتزازاتها بشكل ترددي بمرور الزمن. ويتحقق هذا الشرط اذا كان القوس في المعادلة (24) موجباً $[(bC_{\alpha r} - aC_{\alpha f})>0]$ ويسمى المعامل المذكور understeer

(B) $\zeta = 1$: تكون السيارة محايدة اي في حدود الاستقرارية وعدمها، وتبقى سرعة الاستدارة ثابتة تقريباً او تضمحل ببطء بمرور الزمن ويتحقق هذا الشرط اما في السرع الواطئة جداً (قريبة من الصفر) او اذا كان القوس في بسط المعادلة (24) مساوياً للصفر $(bC_{\alpha r} - aC_{\alpha f})=0$.

(C) $\zeta > 1$: تكون السيارة غير مستقرة وتزداد سرعة دورانها بمرور الزمن بشكل لاترددي، ويتحقق هذا الشرط اذا كان القوس في مقام المعادلة (24) مقداراً سالباً $(bC_{\alpha r} - aC_{\alpha f}<0)$.

* تحديد الاستقرارية بطريقة (هورفيتس Hurvuits)

تحسب الاستقرارية بطريقة هورفيتس باستخدام المعادلة المميزة (الخصائصية) - المعادلة (18) السابقة

$$\psi_{o}\, m^2 r^2 V^2 \left[P^2 + A_1 P + B_1\right] = 0 \qquad (18)$$

تكون السيارة (المطلوبة) مستقرة اذا توفرت الشروط الاتية

1- ان تكون ~~جميع~~ الثوابت موجودة وطبيعية $(A_1 \neq 0 \;,\; B_1 \neq 0)$

2- يجب ان تكون قيم الثوابت A_1 ، B_1 اما سالبة او موجبة في آن واحد

$(A_1 > 0 \;,\; B_1 > 0$ أو $A_1 < 0 \;,\; B_1 < 0)$

3- يجب ان تكون قيمة المحددة الاتية (Determinant) موجبة:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & B_1 \\ 0 & A_1 \end{vmatrix} > 0$$

أن القيمة العددية للثابت (A_1) هي موجبة في كل الأحوال اذ استنتجنا من المعادلة (12) أن

$$A_1 = \frac{1}{mVr^2}\left[C_{\alpha f}(a^2+r^2) + C_{\alpha r}(b^2+r^2)\right] \qquad (12)$$

والحد (A_1) لا يصل صفر في السرعة العالية جداً القريبة من ∞ $(V = \infty)$.

اما (B_1) فمن المحتمل ان تكون $\overset{+}{\underset{-}{0}}$ (من المعادلة (15))

$$B_1 = \frac{1}{m^2V^2r^2}\left[C_{\alpha f}C_{\alpha r}(a+b)^2 + mV^2(bC_{\alpha r} - aC_{\alpha f})\right]$$

تعتمد على قيمة $\overset{+}{\underset{-}{0}}$

وبما أن القيمة العددية للثابت (A_1) موجبة دائماً فيجب أن تكون (B_1) موجبة أيضاً كما ذكرنا لضمان الاستقرارية العرضية للمركبة، وبذلك يتحقق الشرطان الأول والثاني من طريقة هورويتس. أما الشرط الثالث الذي يخص المحددة (D) فهو متحقق أيضاً لأن

$$D = 1 \times A_1 - B_1 \times 0 = A_1 > 0$$

∴ فإن القيمة العددية للثابت (B_1) هي التي تحدد الاستقرارية أو عدمها فإذا كان

أ) $B_1 > 0$ كانت السيارة مستقرة

ب) وإذا $B_1 = 0$ كانت السيارة محايدة وهو الحد الفاصل بين حالة الاستقرارية أو عدمها ومن هذا نستنتج ما يسمى بالسرعة الحرجة V_{cr} - فبتعويض المعادلة (15) عن $B_1 = 0$ نجد V_{cr} كالآتي:

$$\left[V_{cr} = \sqrt{\frac{C_{ap}\, C_{ar} (a+b)^2}{m (a C_{ap} - b C_{ar})}} \right]$$

وهي مطابقة تماماً للمعادلة (29) التي تخص الحركة عديمة الذبذبة، إذن فإن حدود الاستقرارية للحركتين الذبذبية وعديمة الذبذبة متساويتان.

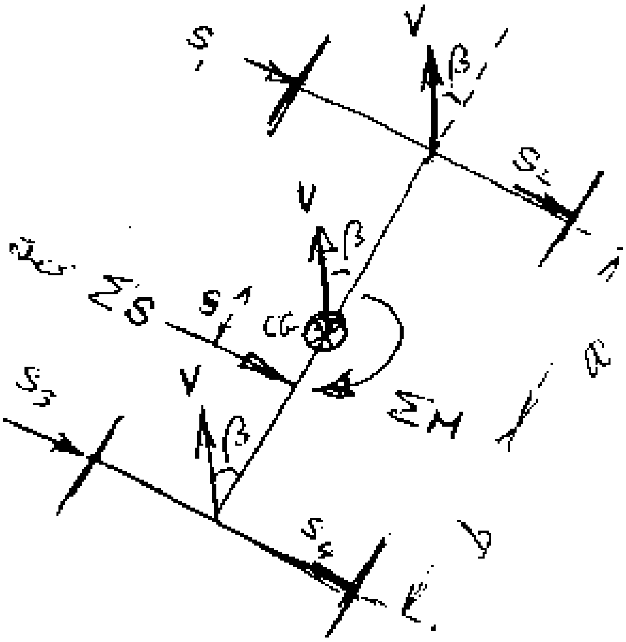
ج) $B_1 < 0$ كانت السيارة غير مستقرة

* الاستقرارية في الحالات الاضطرارية

الحالات الاضطرارية هي الحالات التي يضطر فيها سائق السيارة تغيير اتجاه سيارته بشكل حاد او استعمالها نتيجة لتأثير خارجي او مؤثر بشكل فجائي فيها.

A الاستقرارية بصورة عامة

في حالة السير المستقيم على طريق مستوٍ تتعرض المركبة الى قوة خارجية مفاجئة ولفترة قصيرة من الزمن بحيث تسبب هذه القوة انحرافها عن اتجاه السرعة الاصلية بزاوية β (زاوية الانزلاق) في مركز الثقل انظر الشكل 13.



شكل 13: انحراف المركبة بعد تأثير قوة خارجية مفاجئة فيها.

واذا افترضنا ان جسم السيارة يتحرك بشكل خطي ولا توجد هناك اي حركة دورانية نتيجة لذلك تتساوى زوايا الانزلاق في المحور الامامي وفي المحور الخلفي وفي مركز الثقل
($\beta_f = \beta_r = \beta$)
واهملنا التعجيل الخطي والتعجيل الزاوي والسرعة الزاوية الى الصفر

$$\ddot{y} = 0$$
$$\ddot{\psi} = 0$$
$$\dot{\psi} = 0$$

تكون المركبة في هذه الحالة مستقرة اذا حصلت محصلة مجموع العزوم حول المركز (CG) تقليلاً لزاوية الانزلاق β.

واذا افترضنا ان اتجاه محصلة مجموع العزوم (ΣM) هو باتجاه دوران عقرب الساعة أمكن التمييز بين الحالات الثلاثة التالية.

$\sum M > 0$ كانت السيارة غير مستقرة

$\sum M = 0$ كانت السيارة محايدة

$\sum M < 0$ كانت السيارة مستقرة

ويوجد طريقة اخرى لمعرفة الاستقرارية وتوزيعها وهي حساب محصلة عزوم القوى الجانبية المؤثرة على الاطارات وفي جسم السيارة فاذا كانت المحصلة $\sum S$ محصورة بين مركز الثقل والمحور الخلفي كانت السيارة مستقرة (يعني يجب ان يتغلب عزم المحور الخلفي على عزم المحور الامامي لضمان الاستقرارية (يعني يقلل β) ويمكن كتابتها بالمعادلة الاتية.

$$\sum S \times s = \left[(S_3 + S_4) \times b - (S_1 + S_2) \times a\right] \gtrless 0$$

$$\sum S = (S_1 + S_2) + (S_3 + S_4)$$

وبالتعويض

$$(S_1 + S_2) = C_{\alpha f} \cdot \beta$$

و

$$(S_3 + S_4) = C_{\alpha r} \cdot \beta$$

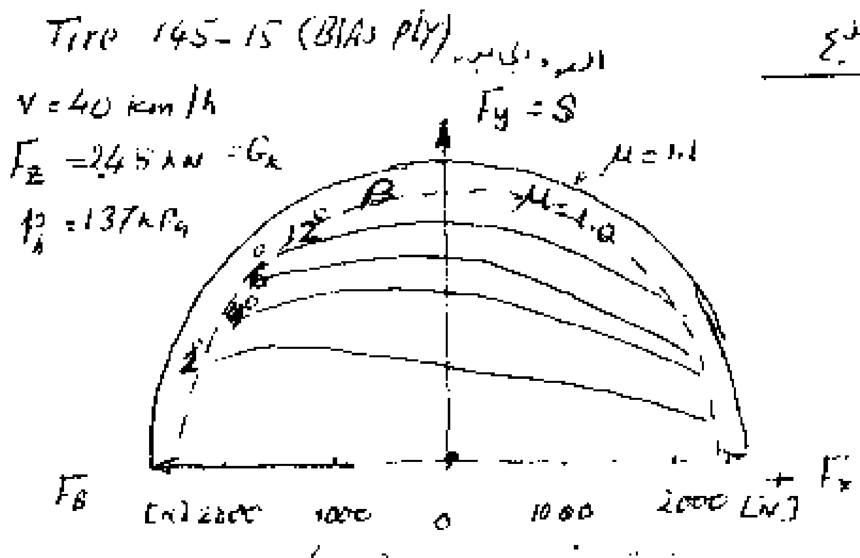
اشتقاق HW

في المعادلة اعلاه وبالاختصار نستنتج المسافة (s) التي تمثل بعد محصلة عزوم القوى الجانبية $\sum S$ عن مركز الثقل حسب المعادلة الاتية

$$s(S) = \frac{C_{\alpha r} \cdot b - C_{\alpha f} \cdot a}{(C_{\alpha f} + C_{\alpha r})} \quad [m] \qquad (30)$$

فاذا كانت $S > 0$	كانت السيارة مستقرة	understeer
$S = 0$	محايدة	Neutral
$S < 0$	غير مستقرة	oversteer

B] الاستقرارية في حالة الكبح



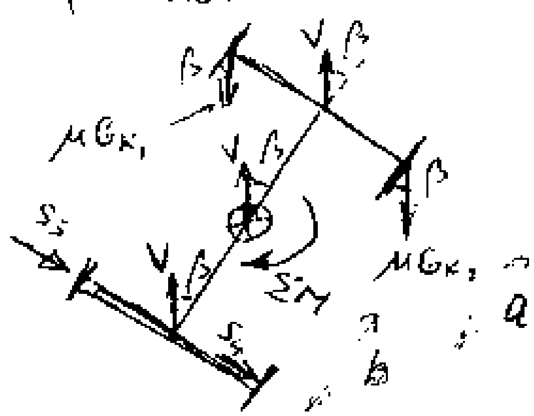
شكل 14 : محدودية القوة الجانبية للإطار (S) لقوة الدفع F_x وقوة الكبح F_B في حالة ثبوت نسبة الانزلاق B والحمل العمودي (G_K)

في حالة كبح عربة السيارات إلى حدود الانزلاق لا تظهر تمام القوى الطرفية تتحقق القوى الكابحة في أسطح التماس الإطار ($S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = 0$) كما نشاهد ذلك في المنحنيات المأخوذة على الإطارات الشكل 14 ، ولكن توجد هناك قوى متكافئة مع مساحة مؤثرة تعاكس اتجاه السرعة.

وتعتمد القيمة العددية لهذه القوى على حاصل ضرب معامل الاحتكاك μ في الحمل العمودي للإطار (G_K) فقط (μG_K) ويمكن التمييز بين الحالات الآتية :
ويمكن التمييز بين الحالات الآتية :

1- الكبح بالدواليب الأمامية

تتم عملية الكبح فقط بوساطة الدواليب الأمامية (في حالة عطل نوع الدواليب الخلفية) ، ففي حالة الدواليب تؤثر على دولاب قوة متكافئة مع مساحة متكافئة (μG_K) و (μG_{K2}) مؤثرة ضد اتجاه السرعة (V) .



شكل 15 : الكبح بالدواليب الأمامية

انظر الشكل 15
وتتحمل القوى الجانبية ($S_1 = S_2 = 0$) أما في المحور الخلفي فلا توجد هناك قوى متكافئة ولكن توجد قوتان جانبيتان هما S_3 ، S_4 .

نأخذ العزم حول مركز الثقل باتجاه حركة عقرب الساعة

$$\sum M = \mu (G_{K1} + G_{K2}) \sin\beta \times a - (S_3 + S_4) \times b = 0 \qquad (31)$$

وبالتعويض عن الكتلة

$$G_{K1} + G_{K2} = G \cdot \frac{b}{a+b}$$

$$(G_{K1} + G_{K2})(a+b) = G \cdot b$$

• نفرض بالتعويض عن التركيب الكاسيتين

$$(S_3 + S_4) = C_{ar} \cdot \beta$$

• وإذا كانت زاوية الانزلاق قليلة المقدار فيمكن

$$\sin\beta = \beta$$

• وإذا كان موقع مركز الثقل في منتصف المسافة بين المحورين

$$a = b$$

تبسط معادلة العزم (31) إلى الآتي

$$\sum M = \mu \cdot mg \cdot \left(\frac{b}{a+b}\right) \cdot \beta \cdot a - C_{ar} \cdot \beta \cdot b = 0$$

$$= \mu \cdot mg \left(\frac{a}{2a}\right) \cdot \beta \cdot a - C_{ar} \cdot \beta \cdot a$$

$$\boxed{\sum M = a\beta \left(\frac{1}{2}\mu mg - C_{ar}\right)} \qquad (32)$$

فلو فرضنا القيم العددية الآتية لتعويضها بالمعادلة أعلاه

- صلابة الانعطاف للإطار الواحد = 40000 N/rad

- معامل الاحتكاك بين الإطار والطريق $\mu = 0.7$

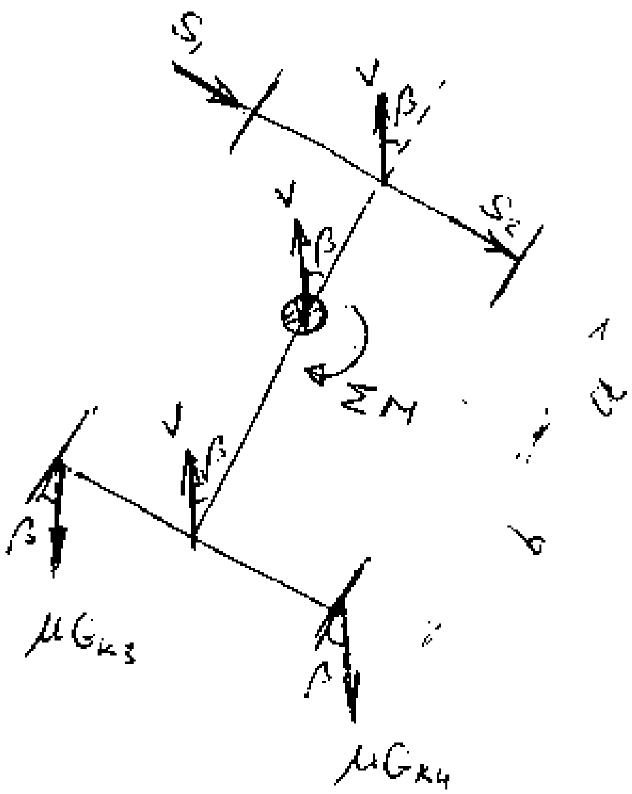
كتلة السيارة المتوسطة الحجم $m = 1200\ kg$

ستكون قيمة $\sum M$ سالبة

$$\sum M = a \times \beta \left(\underbrace{\frac{1}{2} * 0.7 * 1200 * 9.81}_{+4120} - \underbrace{2 * 40000}_{-80000}\right) < 0$$

إذن تكون المركبة مستقرة في هذه الحالة لأن العزم يؤثر ضد زاوية الانزلاق β

2- الكبح بالدواليب الخلفية



شكل 16: الكبح بالدواليب الخلفية

في حالة عطل فرامل الدواليب الأمامية مثلاً تتم عملية الكبح فقط بوساطة الدواليب الخلفية، ففي حالة انزلاقها تؤثر في كل من الدواليب قوة احتكاكية مماسية مقدارها μG_{K3} ، μG_{K4} مؤثرة ضد اتجاه السرعة (V). انظر الشكل 16.

وتضمحل القوتين الجانبيتين الى الصفر ($S_3 = S_4 = 0$). أما في المحور الأمامي فلا توجد هناك قوى احتكاكية ولكن توجد قوى جانبية S_1 ، S_2.

- نأخذ عزوم حول مركز الثقل باتجاه حركة عقرب الساعة.

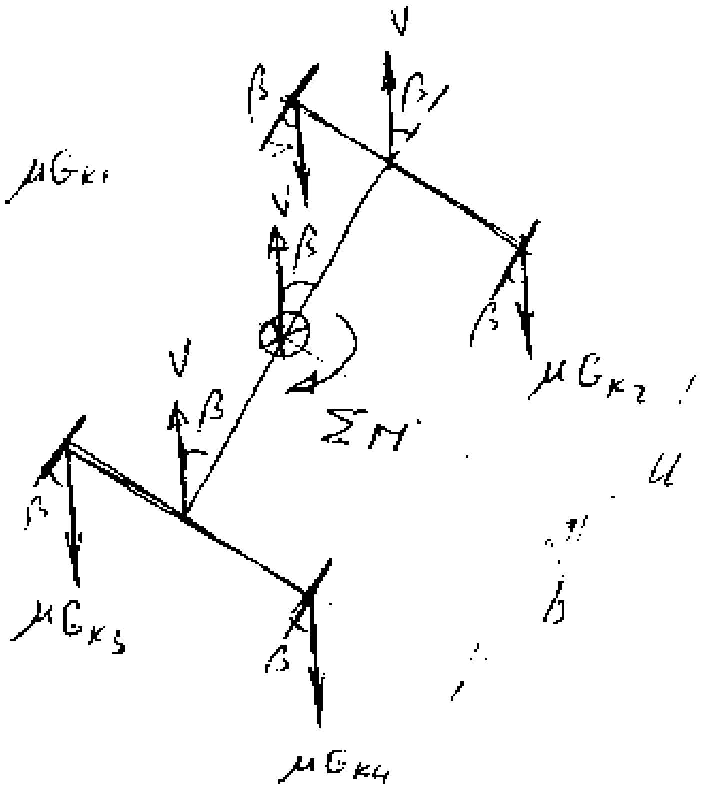
$$\sum M = (S_1+S_2)\times a - \mu (G_{K3}+G_{K4}) \times \sin\beta \times b = 0 \qquad (33)$$

وبالتعويض عن المركبات كما في الحالة التي قبلها نحصل على معادلة العزوم في المعادلة الآتية:

$$\boxed{\sum M = a \times \beta \left(C_{\alpha f} - \frac{1}{2}\mu m g\right)} \qquad (34)$$

وإذا عوضنا نفس الارقام لكل من الحالات السابقة نجد أن $\boxed{\sum M > 0}$ موجبة أي تكون المركبة غير مستقرة في هذه الحالة لأن β تكبر حيث تؤثر $\sum M$ في نفس اتجاه العزم.

3- انزلاق جميع الدواليب



شكل 17 : انزلاق جميع الدواليب

في هذه الحالة تؤثر القوى الاحتكاكية المماسية μG_{k1} ، μG_{k2} ، μG_{k3} ، μG_{k4} ضد اتجاه السرعة (V) ونهمل جميع القوى الجانبية الى الصفر $(S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = 0)$ انظر الشكل 17 .

ونأخذ العزوم حول المركز

$$\sum M = \mu (G_{k1} + G_{k2}) \sin\beta \cdot a - \mu (G_{k3} + G_{k4}) \sin\beta \cdot b = 0 \qquad (35)$$

وبالتعويض عن

$$(G_{k1} + G_{k2}) = mg \left(\frac{b}{a+b} \right)$$

و

$$(G_{k3} + G_{k4}) = mg \left(\frac{a}{a+b} \right)$$

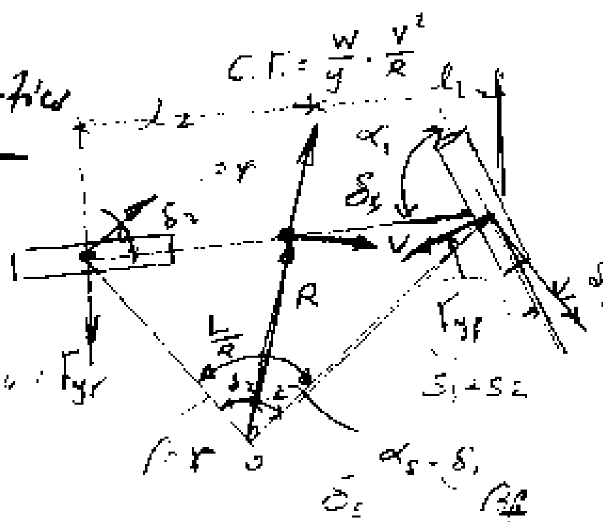
في المعادلة أعلاه نستنتج ان مجموع العزوم يساوي صفر اذ لا تتولد حركة دورانية

$$\boxed{\sum M = 0}$$

Steering geometry

$l_1 + l_2 = l$

steady state
handling characteristics



The relationship between steer angle ~~of front~~ α_s, turning radius R, wheel-base L & slip angles of the front and rear tires δ_1 & δ_2 is given by

$$\alpha_s - \delta_1 + \delta_2 = \frac{L}{R} \qquad \delta_s - \beta_1 + \beta_2 = \frac{L}{R}$$

or $\left[\alpha_s = \frac{L}{R} + \delta_1 - \delta_2\right]$ — ①

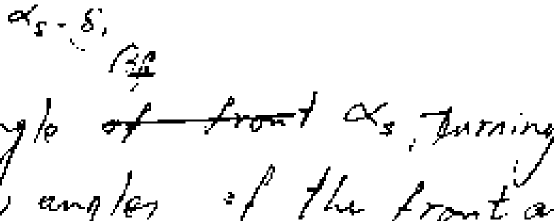
$\delta_s = \frac{L}{R} + \beta_1 - \beta_2$ — ①

• The slip angles δ_1 & δ_2 $\xrightarrow{\text{depend on}}$ ① side forces acting on tires
② cornering stiffness.

For small steer angle is valid:

A $F_{yf} = \frac{W}{g} \cdot \frac{V^2}{R} \cdot \frac{l_2}{L}$ — ②

B $F_{yr} = \frac{W}{g} \cdot \frac{V^2}{R} \cdot \frac{l_1}{l}$ — ③

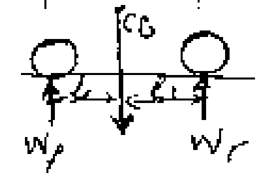


& The normal load on each of front & rear wheels respectively W_f & W_r under static conditions are:

$W_f = \frac{W l_2}{2L} \rightarrow W = 2\frac{W_f \cdot L}{l_2}$

$W_r = \frac{W l_1}{2L} \rightarrow W = 2\frac{W_r \cdot L}{l_1}$

} ③ ②



$F_{yf} = 2W_f \frac{V^2}{gR}$ — ④

$F_{yr} = 2W_r \frac{V^2}{gR}$ — ⑤

the slip angle are given by

$\delta_1 = \frac{F_{yf}}{2C_f} = \frac{W_f}{C_f} \cdot \frac{V^2}{gR}$ — ⑥

$\delta_2 = \frac{F_{yr}}{2C_r} = \frac{W_r}{C_r} \cdot \frac{V^2}{gR}$ — ⑦

$\beta_1 > \beta_2$

$\delta_1 > \delta_2$, yaw motion is initiated & the vehicle turns away from the side force

[illegible]

$V_{ch.}$: a speed at which the steer angle required to negotiate a turn is $\frac{2L}{R}$.

$$V_{ch.} = \sqrt{\frac{gL}{K_{us}}} \quad —(10)$$

$\beta_1 < \beta_2$

(3) oversteer $K_{us} < 0$ $\Rightarrow [\delta_1 < \delta_2]$ & $\left[\frac{W_f}{C_{\alpha f}} < \frac{W_r}{C_{\alpha r}}\right]$

[illegible]

α_s [illegible]

critical speed V_{cr} can be identified

$$V_{cr.} = \sqrt{\frac{gL}{-K_{us}}} \quad —(11)$$

(*) parameters effect

Testing of handling characteristics

طريقة الاختبار من الطرق الثلاثة

1. constant radius test
2. Constant speed (V)
3. constant steer angle (δ)

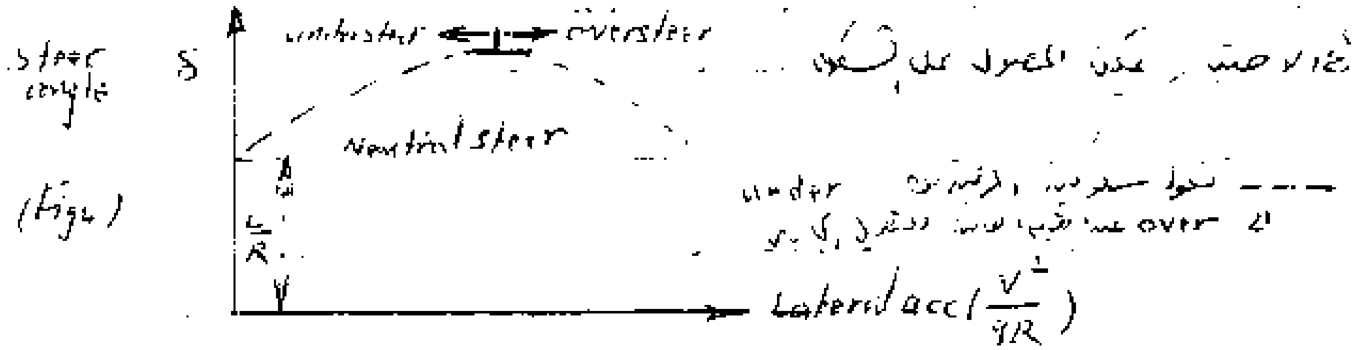
معرفة هذه الحوصلات عن طريق ... لـ (δ) ، V و yaw velocity Ω_z والتعجيل $\frac{V^2}{R}$ (مترابطة)

- يمكن قياس السرعة الدورانية باستخدام (rate gyro) أو يمكن حسابها من حاصل قسمة التعجيل الجانبي على سرعة المركبة [$\frac{a_y}{V}$]
- أما التعجيل الجانبي فيمكن قياسه باستخدام (accelirometer) أو تحديده من حاصل ضرب (السرعة الدورانية * سرعة المركبة) [$V * \Omega_z$]

(1) Constant radius test (R = constant)

- في هذا الاختبار تسير المركبة على طريق دائري (ذو نصف قطر ثابت) وبسرع متزايدة.
- زاوية الاستدارة (δ) تقاس من موضع المركبة ... مع التعجيل الجانبي.

ومن هذا الاختبار يمكن الحصول على الشكل ...



(Fig 4)

عند تحديد سلوكية المركبة من ميل المنحني للشكل 4 يلزم

$$\left[\delta = \frac{L}{R} + K_{us}\cdot\frac{V^2}{gR}\right] \text{ for (const. } R) \Rightarrow d\delta = \frac{K_{us}}{gR}\, d(V^2) \Rightarrow \frac{d\delta}{d\left(\frac{V^2}{gR}\right)} = K_{us}$$

- ميل المنحني يمثل K_{us} (1) إذا كانت (δ) المطلوبة ثابتة عند تغير السرعة ... لجميع السرع ... الميل = صفر ... المركبة (سلوكية محايدة)
- (2) إذا كان الميل موجب ... سلوكية (understeer) ... $K_{us} > 0$
- (3) إذا كان الميل ذو قيمة سالبة ... (oversteer) ... $K_{us} < 0$

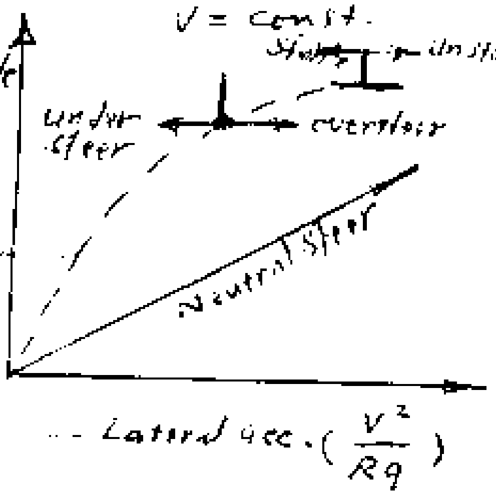
[2] Constant speed test (V = constant)

. في هذا الاختبار تسير المركبة (بسرعة ثابتة) – وتكون بأنصاف أقطار دوران متغيرة (R (Variable)).
. تقاس زاوية الدوران (δ) والتعجيل الجانبي (y) وترسم النتائج كما مبين بالشكل

$$\left[\delta = \frac{L}{R} + K_{us} \cdot \frac{V^2}{gR} \right] \quad / \frac{V^2}{gR}$$

$$\frac{\delta}{\frac{V^2}{gR}} = \frac{L}{\frac{RV^2}{gR}} + K_{us} \Rightarrow \frac{\delta}{\frac{V^2}{gR}} = \frac{gL}{V^2} + K_{us}$$

$$\left[\frac{d\delta}{d\left(\frac{y}{g}\right)} = \frac{gL}{V^2} + K_{us} \right] \text{—} (2)$$



① إذا كانت السيطرة متعادلة ($K_{us} = 0$) – سيكون الميل ثابت = $\frac{gL}{V^2}$.
② ﻫ ﻫ ﻫ understeer ($K_{us} > 0$) ، يزداد الميل بزيادة السرعة ... السيطرة
③ ﻫ ﻫ ﻫ oversteer ($K_{us} < 0$) – سيقل الميل بزيادة السرعة ويصل الصفر عند السرعة الحرجة
④ وعندما يصبح الميل = صفر يكون

$$\frac{gL}{V^2} + K_{us} = 0$$

$$\therefore V_{crit}^2 = \frac{gL}{(-K_{us})} \Rightarrow V_{crit} = \sqrt{\frac{gL}{K_{us}}}$$

في حالة oversteer
تكون السرعة حرجة وتكون المركبة (unstable).

[3] Constant steer angle test δ = const.

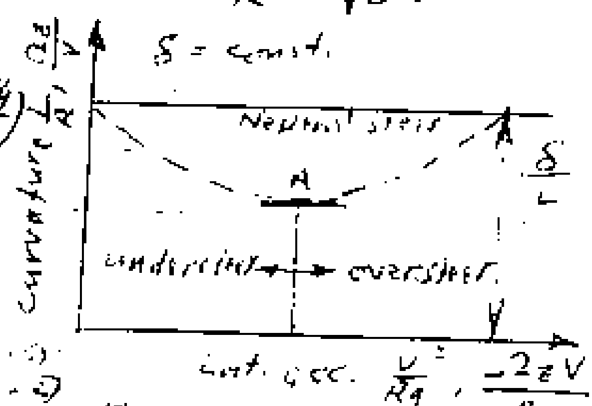
. في هذا الاختبار تسير المركبة بزاوية دوران ثابتة (δ = const) بسرع مختلفة للمركبة
. يقاس التعجيل الجانبي لكل سرعة ويحسب الـ curvature $\frac{1}{R}$ من (السرعة والتعجيل)
حيث [$\frac{1}{R} = \frac{y}{V^2}$] ويرسم منحني بين $\frac{1}{R}$ والتعجيل كما في

$$\delta = \frac{L}{R} + K_{us} \frac{V^2}{gR} \quad / L$$

$$\frac{\delta}{L} = \frac{1}{R} + K_{us}\left(\frac{y}{g}\right) \cdot \frac{1}{L} \Rightarrow \frac{d\delta}{dL} = d\left(\frac{1}{R}\right) + \frac{K_{us}}{L} d\left(\frac{y}{g}\right)$$

$$0 = d\left(\frac{1}{R}\right) + \frac{K_{us}}{L} d\left(\frac{y}{g}\right)$$

$$\left[\frac{d\left(\frac{1}{R}\right)}{d\left(\frac{y}{g}\right)} = -\frac{K_{us}}{L} \right] \text{—} (3)$$



① إذا كانت السيطرة متعادلة ($K_{us} = 0$) – يكون الميل صفر
② ﻫ ﻫ understeer ($K_{us} > 0$) – الميل (سالب)
③ ﻫ ﻫ oversteer ($K_{us} < 0$) – الميل (موجب)

Fig 6.

[2] Constant speed test (v = constant)

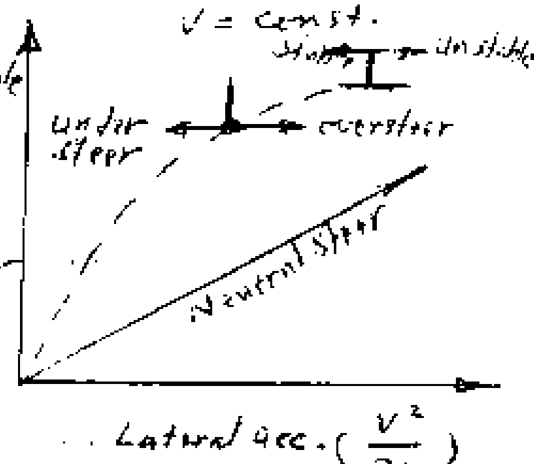
في هذا الاختبار تسير المركبة (سرعة ثابتة) وتكون بزوايا أقطار دوران مختلفة (R (variable)).

تقاس زاوية التوجيه (δ) والتعجيل الجانبي (y) ونرسم النتائج كما موضح أدناه

$$\left[\ \delta = \frac{L}{R} + K_{us}\cdot\frac{V^2}{gR}\ \right] \Big/ \frac{v^2}{gR}$$

$$\frac{\delta}{\frac{v^2}{gR}} = \frac{L}{\frac{Rv^2}{gR}} + K_{us} \Rightarrow \frac{\delta}{\frac{v^2}{gR}} = \frac{gL}{v^2} + K_{us}$$

$$\left[\ \frac{d\delta}{d\left(\frac{y}{g}\right)} = \frac{gL}{v^2} + K_{us}\ \right] \text{—} (2)$$



1. اذا كانت المركبة neutral ($K_{us} = 0$) يكون الميل ثابت ويساوي $\frac{gL}{v^2}$
2. understeer ($K_{us} > 0$) : فإن الميل يزداد ويكون أكبر من السابق
3. oversteer ($K_{us} < 0$) : فإن الميل يقل ويصبح أصغر من السابق
4. عندما يكون الميل يساوي صفر يكون $\frac{gL}{v^2} + K_{us} = 0$

$$V_{crit}^2 = \frac{gL}{(-K_{us})} \Rightarrow V_{crit} = \sqrt{\frac{gL}{-K_{us}}}$$

يحدث oversteer عند سرعة حرجة تكون المركبة غير مستقرة (unstable).

[3] Constant steer angle test ~~δ = const.~~

في هذا الاختبار تسير المركبة بزاوية توجيه ثابتة (δ = const.) وبسرعة مختلفة للمركبة.

تقاس التعجيل الجانبي عند السرع المختلفة وتحسب الـ curvature $\frac{1}{R}$ من التعجيل الجانبي

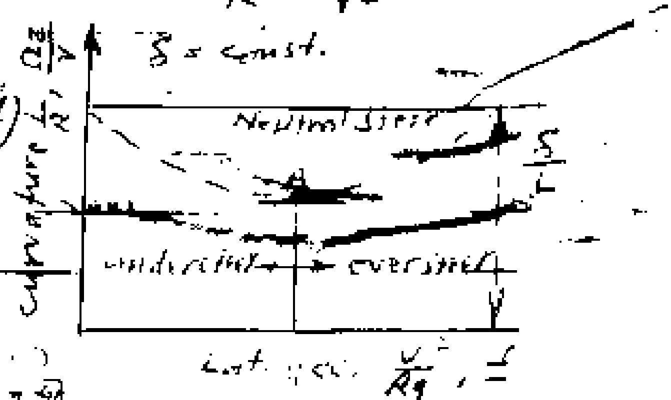
حيث $\left[\ \frac{1}{R} = \frac{y}{V^2}\ \right]$ ونرسم العلاقة بين $\frac{1}{R}$ والتعجيل الجانبي

$$\delta = \frac{L}{R} + K_{us}\frac{v^2}{gR} \Big/ L$$

$$\frac{\delta}{L} = \frac{1}{R} + K_{us}\left(\frac{y}{g}\right)\cdot\frac{1}{L} \Rightarrow \frac{d\delta}{dL} = d\left(\frac{1}{R}\right) + \frac{K_{us}}{L}d\left(\frac{y}{g}\right)$$

$$0 = d\left(\frac{1}{R}\right) + \frac{K_{us}}{L}d\left(\frac{y}{g}\right)$$

$$\left[\ \frac{d\left(\frac{1}{R}\right)}{d\left(\frac{y}{g}\right)} = -\frac{K_{us}}{L}\ \right] \text{—} (3)$$



1. neutral ($K_{us} = 0$) ميل الخط مستقيم يساوي صفر
2. understeer ($K_{us} > 0$) الميل (سالب)
3. oversteer ($K_{us} < 0$) الميل (موجب)

Fig 6.

[illegible] ($R = const$) [illegible]
[illegible] ($V \wedge S$) [illegible]

⊛ Transient Response characteristics

[illegible] الحركة المستقرة [illegible]
الاستقرارية ، [illegible] (ضد الاهتزاز) [illegible]
الاستجابة [illegible] (oscillation) [illegible]
[illegible] (translation / rotation) [illegible]

[illegible] الحركة [illegible]
[illegible]

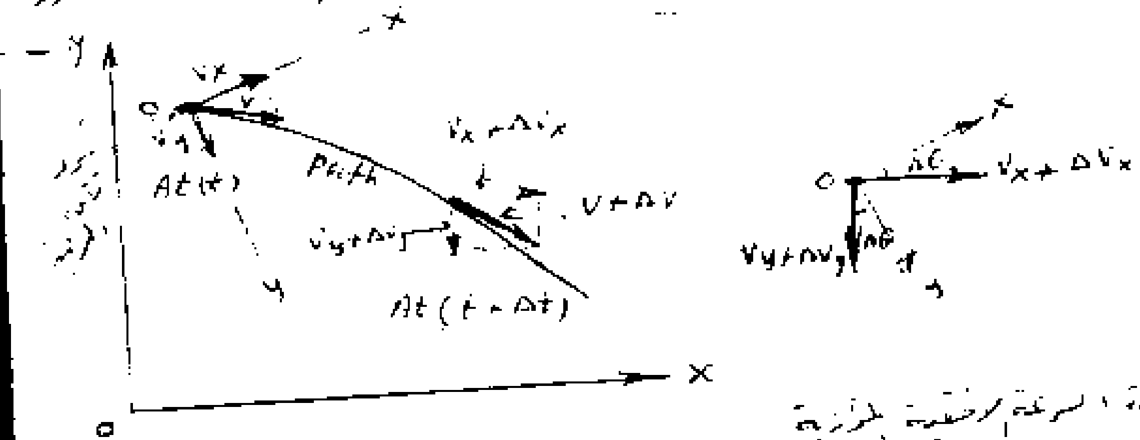


Fig 1

[illegible] (الاتجاه) ox [illegible]

$$(V_x+\Delta V_x)\cos\Delta\theta - (V_y+\Delta V_y)\sin\Delta\theta = V_x\cos\Delta\theta + \Delta V_x\cos\Delta\theta - V_x - V_y\sin\Delta\theta - \Delta V_y\sin\Delta\theta \quad \text{—(4)}$$

[illegible] $\Delta\theta$ [illegible] (4) [illegible]

$$= V_x * 1 + \Delta V_x * 1 - V_x - V_y\Delta\theta = (\Delta V_x - V_y\Delta\theta) \quad \text{—(5)}$$

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} - V_y\frac{d\theta}{dt} = \dot V_x - V_y\Omega_z \quad \text{—(6)}$$

[illegible] V_x [illegible] ox [illegible] V_y

[illegible] $(\ddot y)$ a_y

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} + V_x\frac{d\theta}{dt} = \dot V_y + V_x\Omega_z \quad \text{—(7)}$$

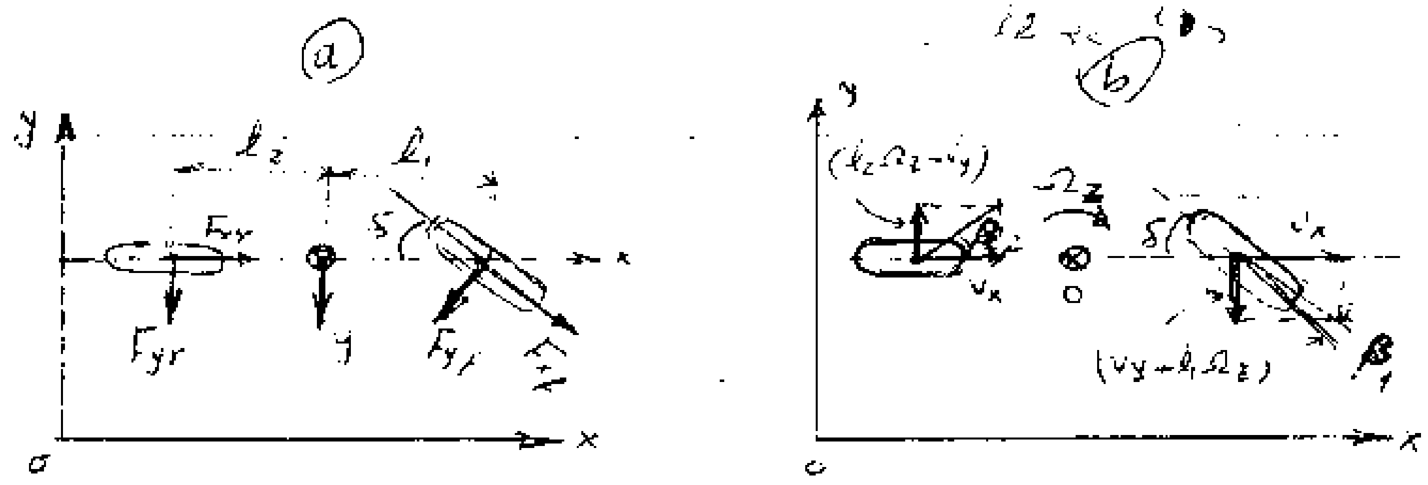


Fig 8 : Simplified vehicle model for analysis

بحث عند شكل العلاقة Fig 8 ، فإن المعادلات الاساسية هي :

$$m(\underbrace{\dot{V}_x - V_y\Omega_z}_{a_x}) = F_{xf}\cos\delta + F_{xr} - F_{yf}\sin\delta \qquad (8)$$

$$m(\dot{V}_y + V_x\Omega_z) = F_{yr} + F_{yf}\cos\delta + F_{xf}\sin\delta \qquad (9)$$

$$I_z\dot{\Omega}_z = l_1 F_{yf}\cos\delta - l_2 F_{yr} + l_1 F_{xf}\sin\delta \qquad (10)$$

حيث I_z عزم القصور الذاتي للمركبة حول Z . [illegible]
[illegible] (roll motion) [illegible]
[illegible] (ح) [illegible]
[illegible] (9) ، (10) .
[illegible] (ع) [illegible] (δ)

assumptions :

$$\beta_1 = \delta - \frac{v_y + l_1\Omega_z}{V_x} \qquad (11)$$

$$\beta_2 = \frac{l_2\Omega_z - V_y}{V_x} \qquad (12)$$

القوى الجانبية المؤثرة على الإطارات الأمامية والخلفية [illegible]
[illegible] .

$$S_f \quad F_{yf} = 2C_{\alpha f}\cdot\beta_1 \qquad (13)$$

$$S_r \quad F_{yr} = 2C_{\alpha r}\cdot\beta_2 \qquad (14)$$

بعد تعويض (11) ، (12) في (13) و (14) ومن ثم التعويض في (9) و (10) والترتيب نحصل :

$$m\dot{V}_y + \left[mV_x + \frac{2l_1C_{\alpha f} - 2l_2C_{\alpha r}}{V_x}\right]\Omega_z + \left[\frac{2C_{\alpha f} + 2C_{\alpha r}}{V_x}\right]V_y = 2C_{\alpha f}\cdot\delta(t) \qquad (15)$$

$$I_z\dot{\Omega}_z + \left[\frac{2l_1^2C_{\alpha f} + 2l_2^2C_{\alpha r}}{V_x}\right]\Omega_z + \left[\frac{2l_1C_{\alpha f} - 2l_2C_{\alpha r}}{V_x}\right]V_y = 2l_1C_{\alpha f}\cdot\delta(t) \qquad (16)$$

[illegible] $\delta(t)$ [illegible]
[illegible] (15) ، (16)

(ج)

(*) Directional Stability

وهي تعالج من وجهة الحركة على

موازنة اتزان كرة ضد المؤثرات الى جهة

The equations of lateral motions are a set of (L.D.E.) with const. coeff. as shown in eqn (15) & (16).

عندما تتعرض المركبة الى تأثير اي مؤثر (رياح) فستتولد Ω_z و V_y كدالة من السرعة الامامية والسرعة الى الجنب Ω_z و V_y سوف تتغير الى exponentially

$(e^{\psi t})$. وتتحدد استقرارية الحركة من قيمة ψ .

(1) $\psi > 0$ & real $\Rightarrow \Omega_z$ & v_y increase exponentially with (t).
تكون الحركة غير مستقرة اتجاهيا

(2) $\psi < 0$ & real تقترب من الحركة المستقرة بعد مرور وقت محدد ⇒ مستقرة اتجاهيا

(3) ψ is complex with (+) real part → the motion will be oscillatory with increasing amplitudes (directionally unstable)

(4) ψ is complex with (−) real part → The motions are oscillatory with decreasing amplitudes (directionally stable).

اذن لمعرفة الاستقرارية الاتجاهية للمركبة من المعادلات تحدد قيمة ψ .

للحصول على قيم ψ نأخذ حل المعادلات التفاضلية للحركة الجانبية (معادلات 15، 16) نفرض كالآتي

$$V_y = A_1 e^{\psi t} \quad — (17)$$

$$\Omega_z = A_2 e^{\psi t} \quad — (18)$$

وبالتفاضل

$$\dot{V}_y = A_1 \psi e^{\psi t} \quad — (19)$$

$$\dot{\Omega}_z = A_2 \psi e^{\psi t} \quad — (20)$$

بالتعويض في المعادلتين (15، 16) وحذف $e^{\psi t}$ وبعد التبسيط نحصل على الآتي

$$m A_1 \psi + a_1 A_1 + a_2 A_2 = 0 \quad — (23)$$

$$I_z A_2 \psi + a_3 A_1 + a_4 A_2 = 0 \quad — (24)$$

amplitude تسمى معادلات equations

where $a_1 = \dfrac{2C_{\alpha f} + 2C_{\alpha r}}{V_x}$; $a_2 = \dfrac{mV_x^2 + 2l_1 C_{\alpha f} - 2l_2 C_{\alpha r}}{V_x}$

$a_3 = \dfrac{2l_1 C_{\alpha f} - 2l_2 C_{\alpha r}}{V_x}$; $a_4 = \dfrac{2l_1^2 C_{\alpha f} + 2l_2^2 C_{\alpha r}}{V_x}$

وللحصول على الحل غير الصفري لـ ψ يجب ان يكون المحددة صفرا

$$\begin{vmatrix} m\psi + a_1 & a_2 \\ a_3 & I_z\psi + a_4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{---(25)}$$

وبفتح المحددة نحصل على

$$m I_z \psi^2 + (I_z a_1 + m a_4)\psi + (a_1 a_4 - a_2 a_3) = 0 \qquad \text{---(26)}$$

اذا كان كلا الحدين موجبين فإن جذور المعادلة ستكون

اما سالب حقيقي negative real no

او معقد complex no having (−) real part

وبما ان $I_z a_1$ و $m a_4$ هي دائما موجبة (لاحظ ان a_4 ، a_1) فان الحد الاوسط في المعادلة (26) دائما موجب.

لكي يكون

if $a_1 a_4 - a_2 a_3 > 0 \rightarrow$ vehicle is directionally stable

$$\text{or} \quad L + \frac{v_x^2}{g} \cdot K_{us} > 0 \qquad \text{---(27)}$$

تتحقق المعادلة (27) عندما تكون k_{us} (موجبة).

وهذا يعني عندما تكون العجلة (understeer) ستكون مستقرة ، O.S,

وعندما تكون k_{us} (سالبة)

ستكون هناك

(1) vehicle is directionally stable

تحصل عندما تكون سرعة المركبة

$$v_x < \sqrt{\frac{gL}{-K_{us}}} \qquad \text{---(28)}$$

(O.S, N.S)

(2) vehicle is directionally unstable

اذا كانت السرعة

$[V_x \geq V_{crit}]$

(Steady state Response to steering Input) نفس مثال P_1 [illegible]

$G = 9.919\,kN \Rightarrow m = 9919 / 9.81 = \underline{\underline{1011\ kg}}$

$I_z = 1031\ kg.m^2$ $\qquad V_x = 80.5\,km/h = 22.36\ m/s$

$$a_1 = \frac{2C_{\alpha f} + 2C_{\alpha r}}{V_x} = \frac{2*58.62 + 2*71.36}{22.23} = \boxed{11.69}\ a_1$$

$$a_2 = \frac{mV_x^2 + 2l_1 C_{\alpha f} - 2l_2 C_{\alpha r}}{V_x}$$

$$= \frac{1011(22.36)^2 + 2*1.22*58.62 - 2*1.04*71.36}{22.36}$$

$$\boxed{a_2 = 22605.7}$$

$$a_3 = \frac{2l_1 C_{\alpha f} - 2l_2 C_{\alpha r}}{V_x} = \frac{2*1.22*58.62 - 2*1.04*71.36}{22.36}$$

$$\boxed{a_3 = -0.241}$$

$$a_4 = \frac{2(1.22)^2 * 58.62 + 2(1.04)^2 * 71.36}{22.36} = 10.8$$

$$\begin{vmatrix} 1011\psi + 11.69 & 22605.7 \\ -0.241 & 1031\psi + 10.8 \end{vmatrix} = 0$$

$1042341\psi^2 + 10918.8\psi + 12052.4\psi + 126.25$

$+ 5447.97 = 0$

$1042341\psi^2 + 22971.2\psi + 5574.22 = 0$

Vertical Dynamics

Human Response to vibration

vibrational parameters are in general

- Displacement
- velocity
- acceleration & jerk [illegible] over the frequency range of interrest.

The sources of vibration of the vehicle may be due to

1. road roughness
2. unbalance of the engine
3. The whirling of shafts الحركة الدوامية للمحور
4. The cam forces
5. The torsional fluctuations

The assessement of human response to vibration is complex in that results are influnced by the variation in individual sensitivity.

The vibration may be < Free vibration / forced vibration

The free vibration may occur when the vehicle passes over an isolated irregularity in the road surface ~~which may be~~

The forced vibration may result when disturbances occur persistently [illegible], such as passing over obstacles on a proving road [illegible]

The following Fig. shows a criteria for vertical vibration

1. Zone 1–6 HZ comfortable zone line with constant jerk $= 12.6\ m/s^3$
2. Zone (6–20 HZ) with const. acceleration $= 0.33\ m/s^2$
3. Zone (20–60) HZ with const. velocity $= 2.7\ mm/s$

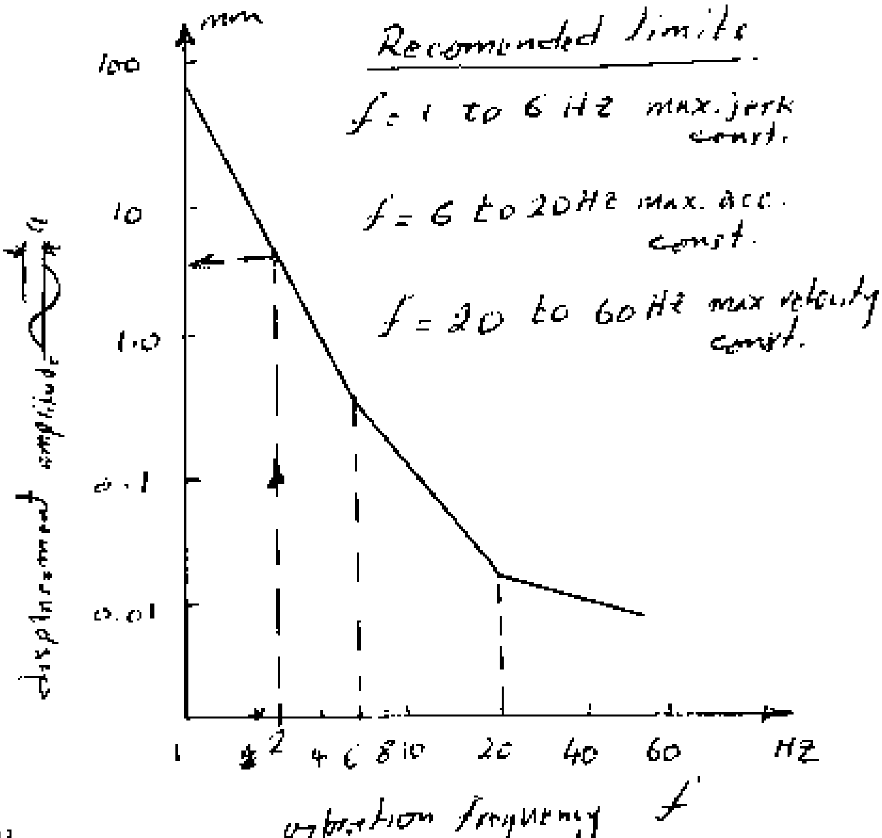


Fig 1: Limits of vertical vibration recommended by Janeway (S.A.E.)

$a\omega^3 = 12.6\ m/s^3$ in zone (1–6 HZ)

$a\omega^2 = 0.33\ m/s^2$ " " (6–20 HZ)

$a\omega = 42.7\ mm/s$ " " (20–60 HZ)

where a – amplitude
ω – circular frequency

[1 HZ = 2π rad/sec]. If the frequency $f = 2HZ$, it will valid the 1st. upper law

$a\omega^3 = 12.6$

$a(2 \times 2\pi)^3 = 12.6 \Rightarrow a = 6.3\ mm$

[illegible] 2 [illegible] a [illegible].

- **period of oscillation**: The time in second during which the body completes one full cycle.

- **frequency of oscillation**: $f = \frac{1}{T}$, the no. of cycles taking place in a unit of time cycles/sec. [Hertz]

- **Amplitude**: Max. displacement from the equilibrium position

- **Jerk**: Rate of change of acceleration [m/s^3]

من المعلوم أن منظومة التعليق للمركبات هي منظومة معقدة مرنة الحركة ولكن سيتم التركيز على النوع البسيط حركتين من حرية الحركة (bounce & pitching) motions

- The natural frequency of bouncing & pitching motion are of the same order of magnitude and generally less than (1 Hz). The wheels move up & down with greater rapidity having natural frequency (6–10 times greater than that of the body motions).

وهنا الفرق الكبير في natural frequency بسبب حركة الـ (bounce & pitch).

The vibration causes human discomfort.

The acceleration in vibratory motion is directly proportional to both (amplitude (a) & frequency (f)), discomfort is equally dependent on both of these factors.

on the basis of experimental results the so-called "comfort curve" corresponds approximately to the equ.

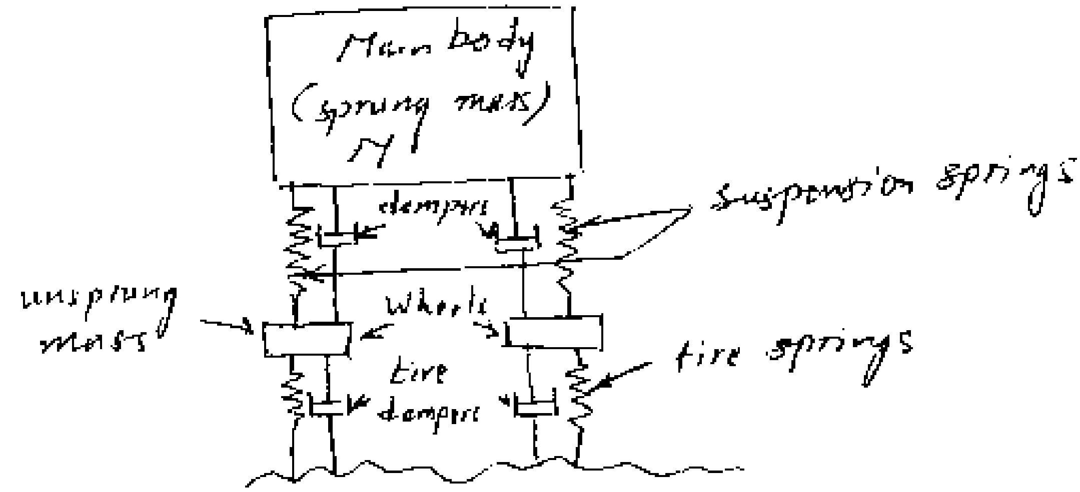
$$\left[\, a f^{2.7} = 127500 \,\right]$$

where a - is amplitude or displacement [cm]
f - " frequency of vibration [c/min]

وللتحليل الحالي نفترض ان حركة الراكب في مستوى المركبة ، فالحركة هنا تتضمن

- vertical
- rotational

} of the vehicle body. The vehicle body is represented by a sprung mass which is constrained by springs and dampers shown in (Fig 2) below



(*) vehicle vibration with Single Degree of Freedom

نبسط منظومة التعليق لمركبة تسير بسرعة ما مع درجة من حرية الحركة .

The mass (M) supported on a spring of stiffness K(kgf/cm) with a damper having a damping coefficient C(kgf/cm/s) [Fig 3a], the excitation is represented by F(t), x(t) - displacement at any time

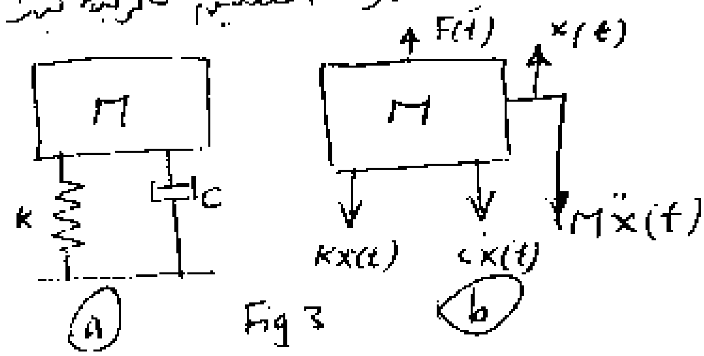


Fig 3

The (F.B.D) is shown in (Fig 3b).

Now Newton's second law gives:

$$\left[F(t) - c\dot{x}(t) - kx(t) = M\ddot{x}(t) \right] \quad \text{— ①}$$

Let $\frac{c}{M} = 2\xi\omega_n$, $\frac{k}{M} = \omega_n^2$, $\frac{F(t)}{k} = f(t)$ — باستخدام هذه الرموز في المعادلة ① نحصل على (أي بقسمة المعادلة على M)

$$\omega_n^2 \qquad f(t)$$
$$\frac{k}{M} \cdot \frac{F(t)}{k}$$

$$\left[\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = \omega_n^2 f(t) \right] \quad \text{— ②}$$

where ξ is the damping ratio and ω_n is the undamped natural frequency.

* Free vibration

In this case $F(t) = 0$

equ. ② becomes

$$\left[\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = 0 \right] \quad \text{— ③}$$

The solution of equ. ③ $\Rightarrow x = Ae^{\lambda t}$ — ④

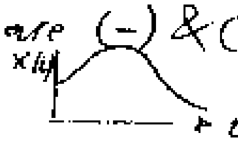
باستخدام ④ مرتين والتعويض في ③ نحصل على المعادلة الآتية

$$\lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0 \quad \text{—(5)} \quad \overset{\text{حل}}{\Rightarrow} \quad \lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

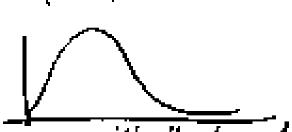
hence the solution becomes

$$\left[x = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \right] \qquad A_1, A_2 \text{ const.}$$

* Three cases ① when $\xi > 1 \Rightarrow \lambda_1$ & λ_2 are (−) & ($x(t)$) decreases with increase of (t)



② critically damped case $\xi = 1$ & $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ the solution is given by $x(t) = (A_1 + A_2 t)e^{\lambda t}$



critically damped

(3) under-damped case

This is our interest in which the system vibrates [$\xi < 1$]

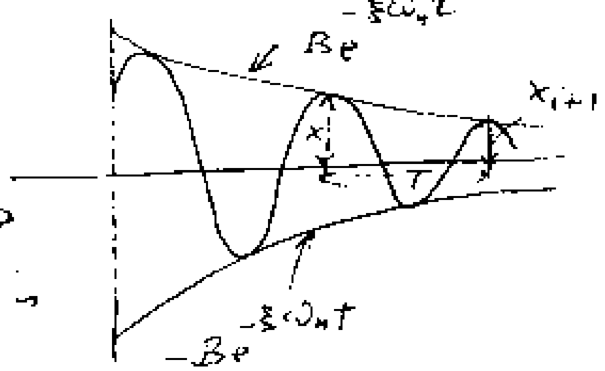
The sol. is
$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left(A_1 e^{i\omega_d t} + A_2 e^{-i\omega_d t}\right)$$
$$= e^{-\xi\omega_n t}\left(B_1 \cos\omega_d t + B_2 \sin\omega_d t\right)$$

وبالتبسيط
$$\left[\, x(t) = B e^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi_1) \,\right] \quad \text{— (6)}$$

where B, B_1, B_2 & ϕ_1 are constants & depends upon initial conditions

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} \quad \text{—— (7)}$$
$$B_1 = B\cos\phi_1 \quad \text{—— (8)}$$
$$B_2 = B\sin\phi_1 \quad \text{—— (9)}$$
$$\tan\phi_1 = \frac{B_2}{B_1} \quad \text{— (10)}$$ & $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ —(11) is called the damped natural frequency

The response $x(t)$ oscillates within an envelope defined by $[x = \pm B e^{-\xi\omega_n t}]$ $\rightarrow$



(Fig 4)

The ratio of successive amplitude is given by

$$\frac{x_i}{x_{i+1}} = \frac{e^{-\xi\omega_n t_i}}{e^{-\xi\omega_n (t_i + T)}} \quad \text{—(12)}$$

$$\frac{x_i}{x_{i+1}} = e^{\xi\omega_n T} = e^{2\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} \quad \text{—(13)}$$

where T is the time period ; $T = \frac{1}{f_d} = \frac{1}{f_n\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$

Now ln of two sides of equ. (13)

$$\ln \frac{x_i}{x_{i+1}} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}, \quad \text{if } \xi << 1$$

$$\left[\ln \frac{x_i}{x_{i+1}} = 2\pi\xi\right] \quad (14)$$

For no damping $[\xi = 0]$ & the response is given by $[x(t) = B\cos(\omega_n t - \phi_i)]$ — (15)

(EX) The springs of a motor vehicle carry a total load of 1150 Kgf & with equal springing front & rear, the combined spring rate is 90 kgf/cm. Calculate the frequency of vertical natural vibration with the dampers removed. If the dampers are adjusted to give a total damping force (4.5 kgf/cm/sec), calculate the frequency of damped vibrations and the ratio of the second downward movement to the 1st downward movement.

Sol. Given $G = 1150$ Kgf, $K = 90$ Kgf/cm, $c = 4.5$ kgf/cm/sec.

Now $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{Kg}{G}} = \sqrt{\frac{90 * 981}{1150}} = 8.762$ rad/sec.

$\therefore f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{8.762}{2\pi} = 1.394$ HZ

Since $2\xi\omega_n = \frac{c}{M} \Rightarrow \xi = \frac{c}{2\omega_n M} = \frac{4.5}{2 * 8.762} * \frac{981}{1150}$

$\xi = 0.219$

Now $f_d = f_n\sqrt{1-\xi^2} = 1.394\sqrt{1-0.219^2} = 1.36$ HZ

$\therefore$ ratio of successive amplitudes

$= e^{-2\omega_n \xi T} = e^{\frac{-\pi f_n \xi}{f_n\sqrt{1-\xi^2}}} = e^{\frac{-\pi * 0.219}{\sqrt{1-0.219^2}}} = e^{-1.41} = 0.244$

Vehicle Dynamics

It can be classified into

- X : Longitudinal
  تم التطرق إليه في
  نظرية الجرارات
- Y : Lateral
- Z : vertical
  سيتم التطرق إليه في
  المرحلة الرابعة

ونبدأ بالـ **vertical Dynamics**

Def.

vibration : Any motion that repeats itself after an interval time is called " vibration or oscillation "

تعنى نظرية الاهتزازات بدراسة الحركات الاهتزازية او التذبذبية للاجسام والقوى المرافقة لها. (اشياؤها مرتبطة بالموضوع).

اهتزازات المنظومات تتضمن تحول او انتقال الطاقة الكامنة الى حركية والحركية الى كامنة بشكل متناوب.

①

بسم الله الرحمن الرحيم ② Vehicle Dynamics

Def. of Vibration: Any motion that repeats itself after an interval of time is called "vibration or oscillation".

مفهوم الاهتزاز

The theory of vibration deals with the study of oscillatory motions of bodies & the forces associated with them.

The vibration of a system involves the transfer of its potential energy to kinetic energy & kinetic energy to potential energy alternately.

تعريف → ● Degree of freedom: The minimum number of independent coordinates required to determine completely the positions of all parts of a system at any instant of time. The simple pendulum shown in (Fig 1) represent a single degree of freedom system.

وكذلك الرسومات في الاشكال الاتية هي تمثل (single degree of freedom)

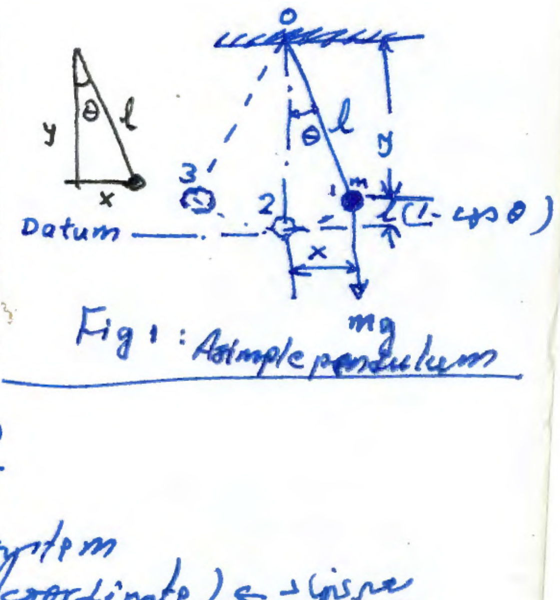
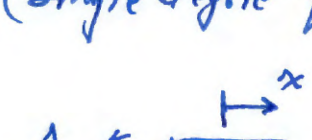
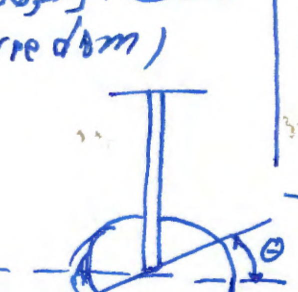


Fig 1: A simple pendulum





slider-crank spring mechanism

يعبر عنها بـ (x او y) او (θ ,r)

spring-mass system

يعبر بـ linear coordinate $x \rightarrow$

torsional system

يعبر بـ ← (angular coordinate)

علماً التعبير عن البندول البسيط في الشكل اما بدلالة زاوية θ او بدلالة الاحداثيات Cartesian (x & y). فاذا تم التعبير عنه بدلالة x و y لا يصح كونه (x و y independent) وفي هذه الحالة فان العلاقة بينهما هي ($x^2+y^2=l^2$)، حيث l هو طول البندول وهي قيمة ثابتة.

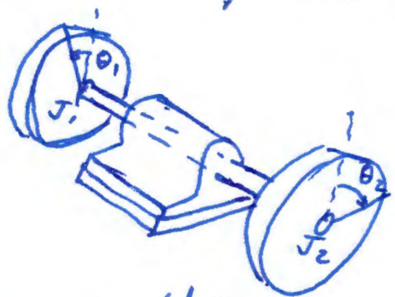
م. عيساوي

(3)

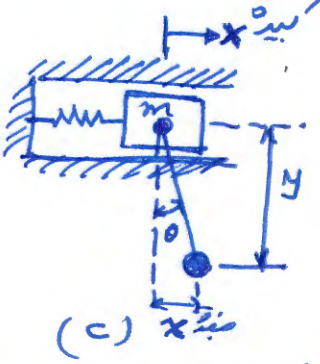
أي يمكن التعبير عن حركة البندول البسيط بدلالة (x, y) أو (r, θ).

(Fig 2) some examples of two degree of freedom syste

(a)
two mass - two spring system
two linear coordinates يوصف بـ
(x_1, x_2)



(b)
two rotor system
يوصف حركته بـ (θ_2, θ_1)

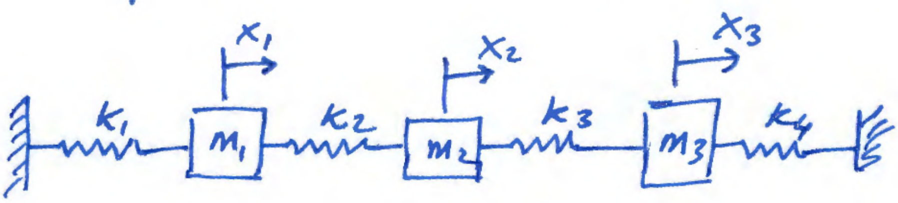


(c)

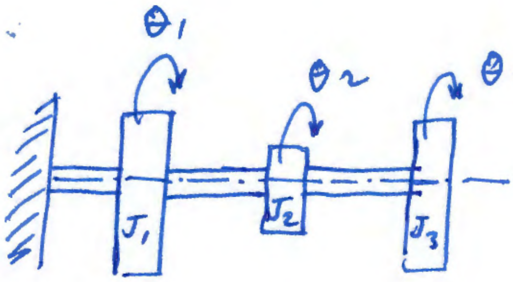
حركته توصف اما بـ
① θ ، x أو
② x ، y ، x

(Fig 2)
[Two degree of freedom system]

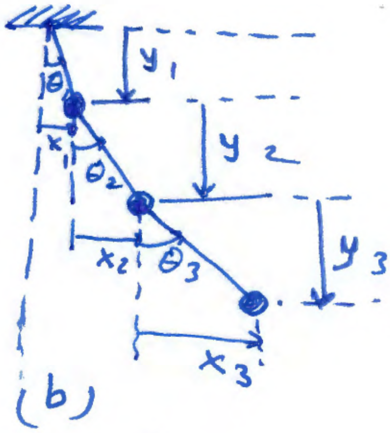
(Fig 3) some examples of three degree of freedom system



(a)



(c)



(b)

(Fig 3 a & c) the coordinates x_i $(i=1,2,3)$ & θ_i $(i=1,2,3)$ can be used to describe the motion.

r. ... θ_i $(i=1,2,3)$ specifies the position of the ...

(*) classification of vibration

vibration can be classified in several ways. Some of the important classification are as follows:

1. <u>Free vibration</u>: If a system, after an initial disturbance, is left to vibrate on its own, the vibration known as <u>free vibration</u>. No external force acts on the system. ذبذبة البندول البسيط هي مثال للاهتزاز الحر

2. <u>Forced vibration</u>: If a system is subjected to an external force (often, a repeating type of force), the resulting vibration is known as forced vibration.
الذبذبة المتصاعدة في محركات الديزل هي مثال للاهتزاز القسري.
If the frequency of the external force coincides with one of the natural frequencies of the system, a condition known as resonance occurs, وتصبح الحركة في حالة خطرة.
أغلب الأعطال التي تصيب الأبنية، الجسور، التوربينات وأجنحة الطائرات لها علاقة بظاهرة الرنين.

3. <u>Undamped vibration</u> If no energy is lost or dissipated in friction or other resistance during oscillation the vibration is known undamped vibration.

4. <u>Damped vibration</u> If any energy is lost in this way (friction or other resistance during oscillation) the vibration is called damped vibration.

(5) linear and Nonlinear vibration : If all the basic components of a vibratory system - the spring, the mass, and the damper - behave linearly, the resulting vibration is known as linear vibration. On the other hand, if any of the basic components behave nonlinearly, the vibration is called nonlinear vibration.

المعادلات التفاضلية التي تصف الخطي هي معادلات تفاضلية خطية
ومعادلات لاخطية عن اللاخطي.

(6) Deterministic vibration : If the value of magnitude of the excitation (force or motion) acting on a vibratory system is known at any given time, the excitation is called deterministic. The resulting vibration is known as deterministic vibration.

(7) Random vibration In some cases, the excitation is nondeterministic or random; the value of the excitation at a given time cannot be predicted. In these cases, a large collection of records of the excitation may exhibit some statistical regularity. It is possible to estimate averages such as

- mean values of excitation
- mean square values of excitation

امثلة على الاثارة العشوائية : سرعة الرياح ، خشونة الطرق ، (...

(1) Free vibration of Single Degree of Freedom (SDF)

(1-1) Force summation method (Newton's Method)

Any system possessing mass and elasticity is capable of vibration.

The system possesses one degree of freedom since its motion is described by a single coordinate x (Fig 4). When placed into motion, oscillation will take place at the natural frequency

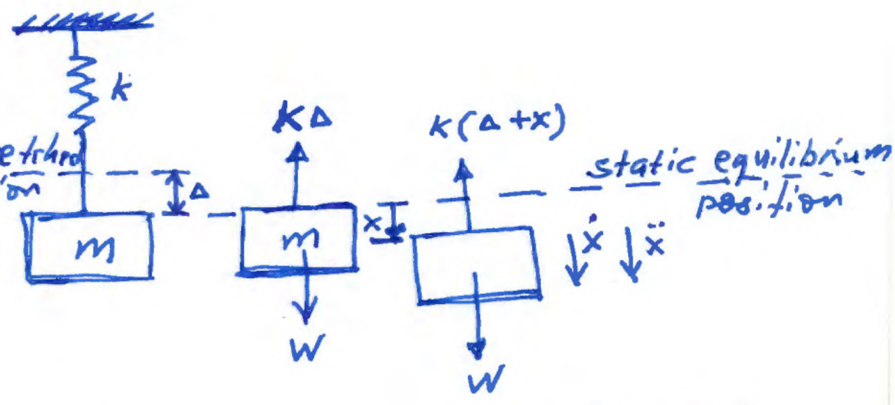


Fig 4 : Spring-mass system and F.B.D

(f_n) which is a property of the system. Newton's 2nd law is 1st basis for examining the motion of the system. As shown in Fig 4 the deformation of the spring in the static equilibrium position is Δ & spring force $K\Delta$ is equal to gravitational force W acting on the mass m:

$$K\Delta = W \qquad \text{—— (1)}$$

Measuring the displacement x from the static equilibrium position, the forces acting on m are $K(\Delta + x)$ and W. with x chosen to be positive in the downward direction, all quantities - forces, velocity & acceleration - are also positive in the downward direction.

بتطبيق قانون نيوتن الثاني على الكتلة m يكون

$$m\ddot{x} = \Sigma F = W - K(\Delta + x)$$

وبما انه $(K\Delta = W)$ — معادلة ① ستتحول المعادلة الى 2

$$m\ddot{x} = \cancel{K\Delta} - \cancel{K\Delta} - Kx$$

$$\therefore m\ddot{x} = -Kx \quad \text{--- (2)}$$

$$m\ddot{x} + Kx = 0 \quad \text{--- (2)}$$

Defining the circular frequency (ω_n) by the equation

$$\omega_n^2 = \frac{K}{m} \quad \text{--- (3)}$$

فبقسمة المعادلة (2) على m ستتحول الى

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad \text{--- (4)}$$

اي هنا ١٠/٢٩

والمعادلة (4) تمثل حركة توافقية بسيطة (harmonic)

Equ. (4) a homogenous 2nd o. linear D.E. has the following general solution:

$$\left[x = A\sin\omega_n t + B\cos\omega_n t\right] \quad \text{--- (5)}$$

Where A & B are the two necessary constants.

وهذه الثوابت تحدد من الشروط الابتدائية $x(0)$ ، $\dot{x}(0)$

Equ. (5) can be shown to reduce to:

$$x = \frac{\dot{x}(0)}{\omega_n}\sin\omega_n t + x(0)\cos\omega_n t \quad \text{--- (6)}$$

The natural period of oscillation is established from

$$\omega_n T = 2\pi \quad \text{or} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{--- (7)}$$

& natural frequency $f_n = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ — (8)

As with the torsional pendulum, in which case Newton's 2nd law :

$$J\ddot{\theta} = \sum M \qquad (9)$$

١٠/١٢/٢٠١٠ الحلقة ١٠/١٨

(1-2) The Energy Method

الطريقة الاعتيادية

In a conservative system the total energy is constant. and the diff. equation of motion can be established by the principle of conservation of energy. قانون حفظ الطاقة

في الاهتزازات الحرة للمنظومات الاهتزازية غير المخمدة فان جزء من الطاقة يكون حركي Kinetic وجزء كامن potential

$$T + U = \text{constant} \qquad (10)$$

توضيح

$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0 \qquad (11)$$

فاذا كان الاهتمام في الاهتزاز الطبيعي natural frequency معلومة it can be determined by the following considerations.

ومن قانون حفظ الطاقة تبقى ثابتة:

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2 \qquad (12)$$

حيث 1، 2 تمثل وقتين مختلفين.

Let 1 be the time when the mass is passing through its static equilibrium position & choose $U_1 = 0$ as reference of potential energy.

Let 2 be the time corresponding to the maximum displaced of the mass. At this position, the velocity of

However, if the system is undergoing harmonic motion, then T_1 & U_2 are max. values, and hence

$$T_{max.} = U_{max.} \qquad (14)$$

وهذه المعادلة تقود الى التردد الطبيعي natural frequency

$$K.E \Rightarrow T_{max} = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2_{max.} = \frac{1}{2} J \omega_n^2 . A^2 \qquad (\dot{\theta}_{max.} = \omega_n . A)$$

$$\& \quad P.E \Rightarrow U_{max.} = \frac{1}{2} K \theta^2_{max.} = \frac{1}{2} K A^2$$

وبإجراء المساواة حسب (14)

$$\cancel{\tfrac{1}{2}} J \omega_n^2 . \cancel{A^2} = \cancel{\tfrac{1}{2}} K \cancel{A^2}$$

$$\therefore \omega_n^2 = \frac{K}{J}$$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{K}{J}}$$

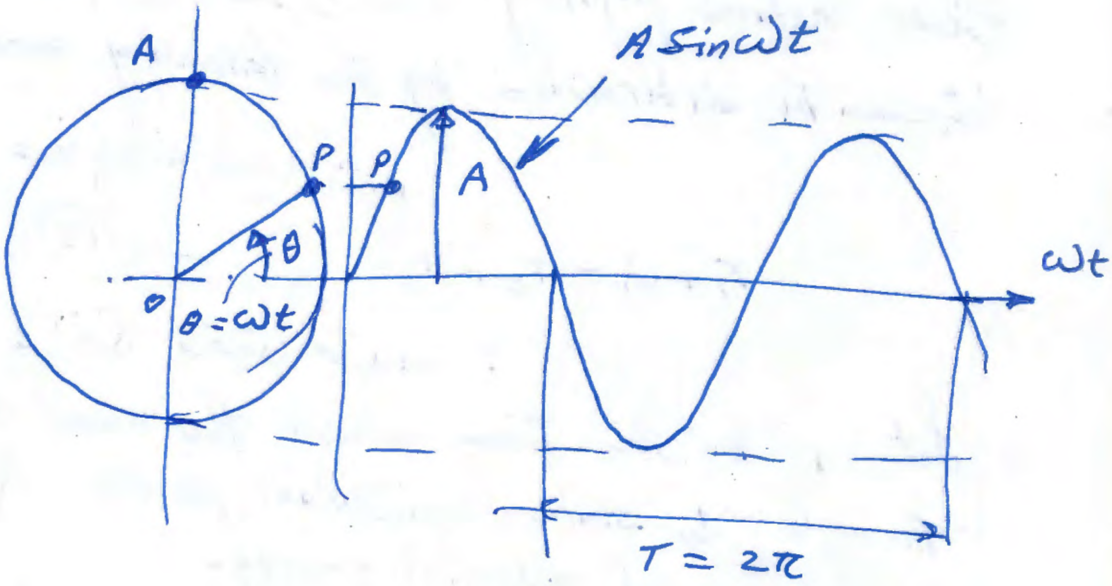


Fig 5 Harmonic motion

1-3 D'Alembert's principle

The resultant force acting on the system

$$\Sigma F = W - k(\Delta + x) \qquad \text{لأن} \Rightarrow W = k\Delta$$

$$\Sigma F = kx$$

The inertia force $\quad F_m = m\ddot{x}$

Applying principle of dynamic equilibrium, the sum of resultant force and inertia force acting on the system must be zero.

$$\Sigma F + F_m = 0$$

$\therefore \ [\, m\ddot{x} + kx = 0 \,]$ this is the same equation (2, 4)

1.4 Rayleigh's Method

The motion of oscillation is assumed as simple harmonic motion.

$\therefore \quad x = X \sin \omega_n t$

حيث $\Rightarrow$ x : displacement of the body from the mean position after time t.

X : max. displacement from mean position to the extreme position

Defferentiating, the velocity is: بتفاضل بالنسبة للزمن

$$\dot{x} = \omega_n X \cos \omega_n t$$

the max. Kinetic Energy

$$(KE)_{max.} = \frac{1}{2} m (\dot{x})^2_{max.} = \frac{1}{2} m \omega_n^2 \cdot X^2$$

The max. potential energy is at extreme position, where $x = X$

$$\therefore \quad (PE)_{max.} = \frac{1}{2} K (x)^2_{max.} = \frac{1}{2} K X^2$$

As per Reigleigh's method

$$(KE)_{max.} = (PE)_{max.}$$

$$\frac{1}{2} m \omega_n^2 X^2 = \frac{1}{2} K X^2$$

$$m \omega_n^2 = K$$

$$\therefore \quad \omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

All the above methods give identical results and can be used to estimate natural frequency of the system.

(*) Natural Frequency

The natural circular frequency may be defind as $\omega_n^2 = \frac{K}{m}$; the equ. 2 (6 in) can be rewritten as:

general solution

$$x = \underline{\underline{A}} \sin \omega_n \cdot t + \underline{\underline{B}} \cos \omega_n \cdot t \qquad \text{—— (15)}$$

initial conditions ⟵ ثوابت تحددها من الـ

بتفاضل (15)

$$\dot{x} = A\omega_n \cos \omega_n \cdot t - B\omega_n \cdot \sin \omega_n \cdot t \qquad \text{—— (16)}$$

Eq. (15) can be expressed differently

a) Assume $A = X\cos\phi$ & $B = X\sin\phi$

$$\therefore \quad x = X(\sin \omega_n \cdot t \cos\phi + \cos \omega_n \cdot t \sin\phi)$$

$$\text{or} \quad x = X \sin(\omega_n \cdot t + \phi) \qquad \text{—— (17)}$$

b) Assume $A = X\cos\psi$ & $B = X\sin\psi$

$$\therefore \quad x = X(\sin \omega_n \cdot t \cos\psi + \cos \omega_n \cdot t \sin\psi)$$

$$\text{or} \quad x = X \sin(\omega_n \cdot t + \psi)$$

where X, ϕ & ψ are constants to be evaluated from initial conditions.

The above solutions shows that the system vibrates with frequency

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad ; \ \omega_n : \text{natural circular frequency of vibration.}$$

One ~~cyle~~ cycle of motion is completed in an angle 2π, therefore, the period of vibration is

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \text{—— (18)}$$

the natural linear frequency $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ [HZ] — (19)

$W = k\Delta = mg$ — من معادلة ① ص ٥

$$\frac{k}{m} = \frac{g}{\Delta}$$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{g}{\Delta}}$$

$$\therefore T = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta}{g}} \qquad \text{—— (20)}$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\Delta}}$$

ω_n, T & f_n are functions of mass & stiffness of the system.

١٥/١٠/٢٧

⊛ Inertia Effect of Spring Mass

The mass and inertia effect of spring have been neglected in the above analysis. The same may be taken into account as follows:

Let – mass of spring wire / unit length $= m'$

– velocity of free end of spring at time $t = v$

– Total length of spring wire $= L$

Consider a small length (dy) at a distance (y) measured round the spring coils from the fixed end.

K.E. of small element $= \frac{1}{2} \times$ mass of element $\times$ (velocity)^2

$$= \frac{1}{2}(m' \cdot dy)\left(\frac{y}{l}v\right)^2$$

$$\text{K.E of total spring} = \int_0^L \frac{1}{2} m' v^2 \left(\frac{y}{l}\right)^2 dy = \frac{1}{2}\frac{m' v^2}{l^2}\int_0^l y^2\, dy$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m' v^2}{l^2} \cdot \frac{l^3}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}(m' l) v^2$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2} \times \text{mass of spring} \times (\text{velocity of free end})^2\right]$$

$= \frac{1}{3}$ K.E of spring moving with the velocity of free end

Therefore, inertia effect of spring is equal to that of one-third mass of spring concentrated at its free end.

- Equivalent mass of the system at free end,

$$\left[m_e = m + \frac{m'}{3}\right] \quad ; \; m = \text{suspended mass}$$

$$\therefore \quad f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m_e}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\left[\frac{K}{m + \frac{m'}{3}}\right]}$$

But the natural frequency of the system

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mg/\Delta}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\Delta}}$$

where Δ = static deflection under suspended mass (m).

The static deflection (Δ) of a rod suspended vertically,

$$\Delta = \frac{mgl}{AE}$$

; A : cross-sectional area of rod
l : length of rod
E : young's modulus of rod.

The frequency for this case is:

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\Delta}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{gAE}{mgl}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{AE}{ml}}$$

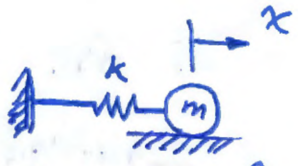
Taking the mass of the rod into account

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{AE}{\left(m + \frac{m'}{3}\right)l}}$$

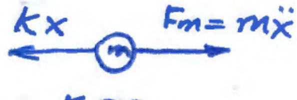
where m' : mass of rod.

Longitudinal vibrations

كتلة مربوطة بنابض بشكل افقي كما في الشكل ان نفرض لا يوجد
احتكاك بين الكتلة والسطح .



Longitudinal vibration



F.B.D

Applying D'Alembert's principle of dynamic equilibrium

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad / m$$

$$\therefore \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

The above equation for simple harmonic motion can be written as

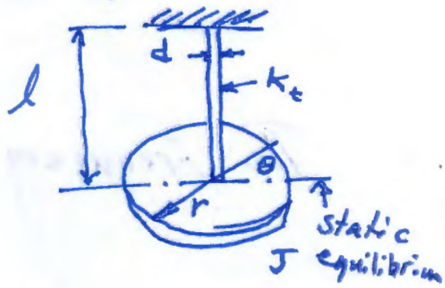
$$\ddot{x} + \omega_n^2 \cdot x = 0 \qquad \text{--- (21)} \qquad \text{حيث} \; \omega_n^2 = \frac{k}{m} \text{ or } \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\therefore f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \; (Hz) \quad \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

The general solution of equ. (21) will be $\boxed{x = A \sin\omega_n t + B \cos\omega_n t}$

Torsional vibration

اذا دورنا القرص بزاوية θ حول محور العمود وتركناه
سوف يتحرك حركة اهتزازية التوائية .



The mass moment of inertia of rotor disk $I = \frac{1}{2} m \cdot k^2 = \frac{1}{2} m r^2$

k : radius of gyration
r : radius of rotor disk
m : mass of " "

The shaft equation is : $\frac{T}{J} = \frac{G\theta}{l}$;

T : Torque
J : Polar moment of inertia of shaft
$J = \frac{\pi d^4}{32}$
d : Shaft dia.
G : modulus of rigidity
l : length of shaft

The torsional resis. of shaft (k_t)

$$k_t = \frac{T}{\theta} = \frac{GJ}{l} = \frac{G}{l} \cdot \frac{\pi d^4}{32}$$

7

Applying D'Alembert's principle at dynamic equilibrium

$$I\ddot{\theta} + k_t \cdot \theta = 0 \quad / I$$

$$\ddot{\theta} + \frac{k_t}{I} \cdot \theta = 0 \qquad \text{—— (22)}$$

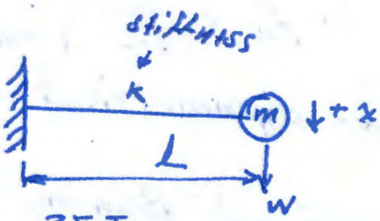
the equ. of harmonic motion will be

$$(22) \text{ —— } \ddot{\theta} + \omega_n^2 \cdot \theta = 0 \Rightarrow \text{عند} \quad \frac{k_t}{I} = \omega_n^2 \quad \therefore \omega_n = \sqrt{\frac{k_t}{I}}$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_t}{I}} \; (Hz) \quad \& \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k_t}}$$

(*) Transverse vibrations

1- cantilever



$$\Delta = \frac{WL^3}{3EI}$$

stiffness $k = \frac{\text{Load}}{\text{deflection}} = \frac{W}{\Delta} = \frac{3\cancel{W}EI}{\cancel{W}L^3} = \frac{3EI}{l^3}$

Where EI : flexural rigidity of the beam

The general equ. of motion for undamped free vibration is:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\therefore m\ddot{x} + \frac{3EI}{l^3}x = 0 \,/ m \Rightarrow \text{or} \quad \ddot{x} + \frac{3EI}{ml^3} \cdot x = 0$$

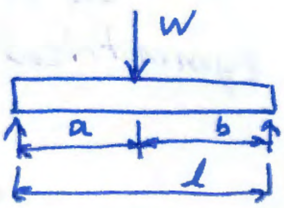
the equ. of harmonic motion

$$\ddot{x} + \omega_n^2 \cdot x = 0 \quad \therefore \omega_n^2 = \frac{3EI}{ml^3}$$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{3EI}{mL^3}} \; (\text{rad/sec.})$$

$$\therefore f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3EI}{mL^3}} \; (Hz)$$

2. Simply Supported Beam



Simply supported beam

The deflection

$$\Delta = \frac{Wa^2b^2}{3EIl} = \frac{mga^2b^2}{3EIl}$$

vibration.

... beam

General equ. for undamped free vibration is:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$m\ddot{x} + \frac{3EIl}{a^2b^2}x = 0 \Big/ m \Rightarrow \ddot{x} + \frac{3EIl}{ma^2b^2}x = 0$$

the eq. of harmonic motion is

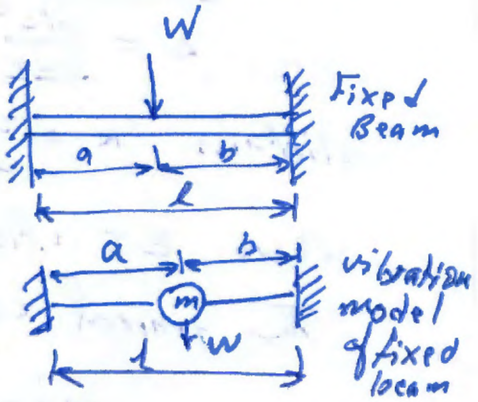
$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \qquad \therefore \omega_n^2 = \frac{3EI.l}{ma^2b^2}$$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{3EI.l}{ma^2b^2}} \ (rad/sec.)$$

$$\therefore f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3EIl}{ma^2b^2}} \ (Hz)$$

for symmetrical loading $\quad a = b = \frac{l}{2} \Rightarrow f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{48EI}{ml^3}}$ (Hz)

③ Fixed Beams



The deflection $\quad \Delta = \frac{mga^3b^3}{3EIl^3}$

The stiffness $\quad k = \frac{3EIl^3}{a^3b^3}$

general eq. for undamped free vib.

$$m\ddot{x} + kx = 0 \Longrightarrow m\ddot{x} + \frac{3EIl^3}{a^3b^3}x = 0$$

the eq. of harmonic motion is

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \qquad \therefore \omega_n^2 = \frac{3EIl^3}{m\, a^3b^3} \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{3EIl^3}{a^3b^3.m}}$$

$$\therefore f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3EIl^3}{ma^2b^2}} \ Hz$$

For symmetrical loading $\quad a = b = \frac{1}{2}l$

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{192EI}{ml^3}} \ (Hz)$$

where ω_n - natural frequency

Z - amplitude of bounce motion

Θ - " " pitch motion

19 18 22 23

نحصل (27) ، (26) في المعادلتين (31) ، (30) تعويض المعادلتين

58 57 62 61

على

$$(D_1 - \omega_n^2) Z + D_2 \Theta = 0 \qquad \text{— 63 (32) (24)}$$

$$\left(\frac{D_2}{r_y^2}\right) Z + (D_3 - \omega_n^2)\Theta = 0 \qquad \text{— 64 (33) (25)}$$

solving the above equations, one obtains the frequency equation for the principal modes:

$$\omega_n^4 - (D_1 - D_3)\omega_n^2 + \left(D_1 D_3 - \frac{D_2^2}{r_y^2}\right) = 0 \qquad \text{— 65 (34) (26)}$$

من المعادلة (34) نحصل على ω_{n2} ، ω_{n1} (2 natural frequencies)

$$\omega_{n1}^2 = \frac{1}{2}(D_1 + D_3) - \sqrt{\frac{1}{4}(D_1 - D_3)^2 + \frac{D_2^2}{r_y^2}} \qquad \text{— 66 (35) (27)}$$

$$\omega_{n2}^2 = \frac{1}{2}(D_1 + D_3) + \sqrt{\frac{1}{4}(D_1 - D_3)^2 + \frac{D_2^2}{r_y^2}} \qquad \text{— 67 (36) (28)}$$

These frequencies for coupled motions ω_{n1} & ω_{n2} always lie outside of the frequencies for uncoupled motions ω_{nx} & $\omega_{n\theta}$.

The amplitude ratios from equs (32), (33) of the bounce and pitch oscillations for the two natural frequencies ω_{n1} & ω_{n2} can be determined:

For ω_{n1}
$$\left.\frac{Z}{\Theta}\right|_{\omega_{n1}} = \frac{D_2}{\omega_{n1}^2 - D_1} \qquad \text{— (29) (37) 68}$$

& For ω_{n2}
$$\left.\frac{Z}{\Theta}\right|_{\omega_{n2}} = \frac{D_2}{\omega_{n2}^2 - D_1} \qquad \text{— (30) 38 69}$$

these ratios will have opposite signs

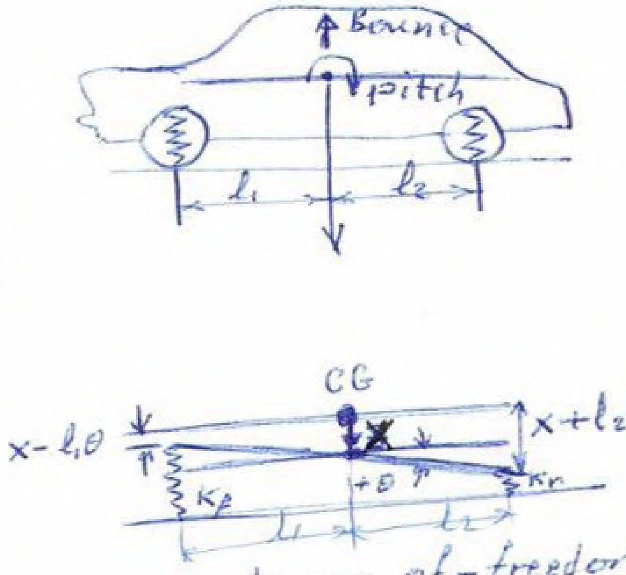
(*) Two - Degrees - of - Freedom Vehicle Model for pitch & Bounce

١٣/١٤١٢

(تعطى من الملخص)
(هذا الموضوع)

The up & down linear motion (bounce) & the angular motion (pitch) of the vehicle body & the motion of the wheels may be considered to exist almost independently.

Refferring to (Fig →), we can study the two motions.



A two - degrees of - freedom ride model for pitch & bounce of the sprung mass

By (Newton's 2nd law) & using the static equilibrium position as the origin for both the linear displacement of the (x) and angular displacement of the vehicle body (θ), the equations of motion for the system can be formulated:

$\sum F = ma$ & $\sum M = I\alpha$

The equation of motion for vertical motion (bounce)

$$m\ddot{z} = -k_f(z - l_1\theta) - k_r(z + l_2\theta) \quad \cdots \quad (16)\ (\cancel{24})(55) \text{ bounce}$$

$$I_y\ddot{\theta} = m_s r_y^2 \ddot{\theta} = k_f l_1 (z - l_1\theta) - k_r l_2 (z + l_2\theta) \quad \cdots \quad (56)\ (\cancel{25})\ (17) \text{ pitch}$$

where k_f, k_r - is the front & rear stiffness respectively

I_y - mass moment of inertia

r_y - radius of gyration of the vehicle body about (y-axis)

Assume that $D_1 = \frac{1}{m_s}(k_f + k_r)$

$$D_2 = \frac{1}{m_s}(k_r l_2 - k_f l_1)$$

$$D_3 = \frac{1}{I_y}(k_f l_1^2 + k_r l_2^2) = \frac{1}{m_s \cdot r_y^2}(k_f l_1^2 + k_r l_2^2)$$

باستخدام هذه الافتراضات في المعادلات (24)، (25) ستصبح كالآتي:

$$\ddot{z} + D_1 z + D_2 \theta = 0 \qquad \text{—} (\cancel{26})(57)' 18$$

$$\ddot{\theta} + D_3 \theta + \frac{D_2}{r_y^2} z = 0 \qquad \text{—} (27)(58)' 19$$

من الواضح هنا أن

D_2 - is the coupling coefficient for the (bounce) & (pitch) motions.

هنا 11/12/21

. These motion uncouple when $(k_f \cdot l_1 = k_r \cdot l_2)$ with this condition a force applied to the CG induces only (bounce motion), while amoment applied to the body produces only (pitch motion). In this case, the natural frequencies for the uncoupled bounce & pitch motions are

$$\omega_{nz} = \sqrt{D_1} \qquad \text{—} (59)\ (\cancel{28})\ 20$$

$$\omega_{n\theta} = \sqrt{D_3} \qquad \text{—} (60)\ (\cancel{29})\ 21$$

~~($D_2 = 0$)~~ $D_2 = 0$

الحصة ٢/١٠ →

ولكن هذه الحالة نادرة جداً

In general, the pitch & bounce motions are coupled and an impulse at the front or rear wheels excites both motions.

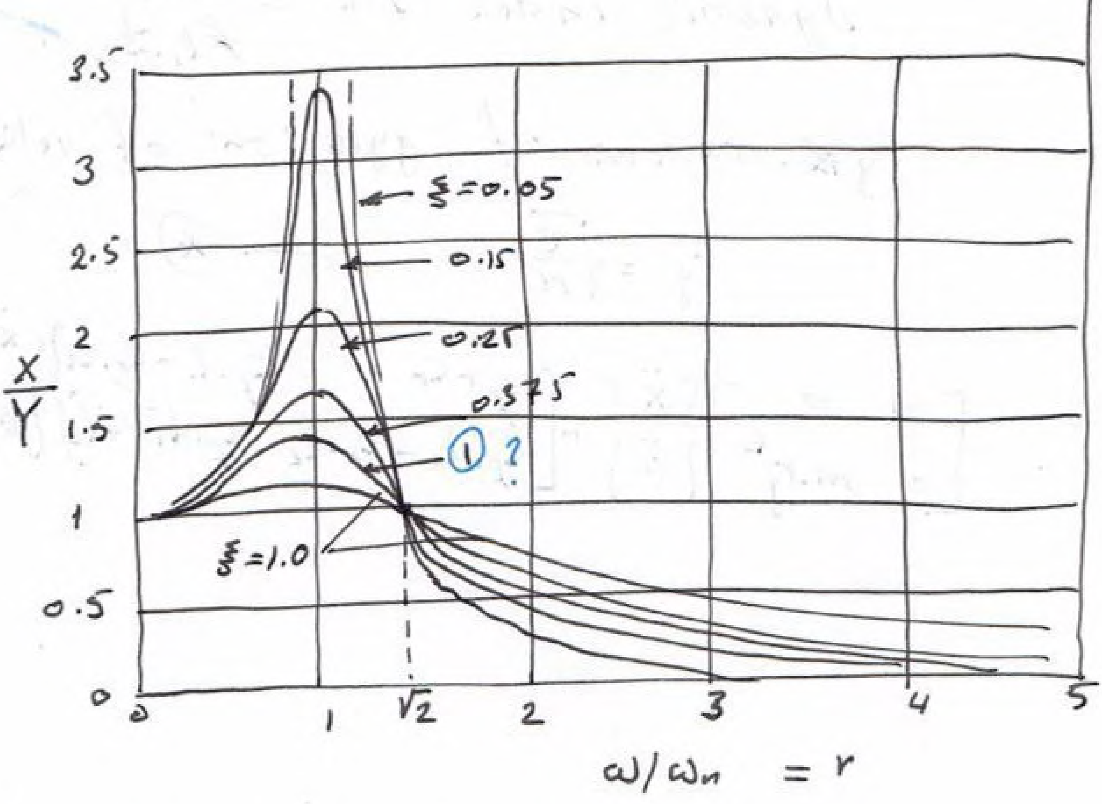
The solutions of equation (55) (~~24~~), 56 (~~25~~) can be expressed in the following form

$$z = Z \cos \omega_n t \qquad \text{—} (\cancel{30})\ 61\ (22)$$

$$\theta = \Theta \cos \omega_n t \qquad \text{—} (\cancel{31})\ 62\ (23)$$

ناهنا ٤/٤/١٤ م

ونرسم المعادلة اعلاه بقيم مختلفة في الشكل ادناه



نلاحظ من الشكل اعلاه فاذا كانت $\frac{\omega}{\omega_n} < \sqrt{2}$ فان ازاحة كتلة المركبة (الكتلة المعلقة) ستكون أقل من ازاحة الكتلة غير المعلقة.

In fact the natural frequency of the unsprung mass system should be much greater that of the vehicle mass.

وهناك طريقتان للحصول على هذا الشيء , باستدعاء المعادلة

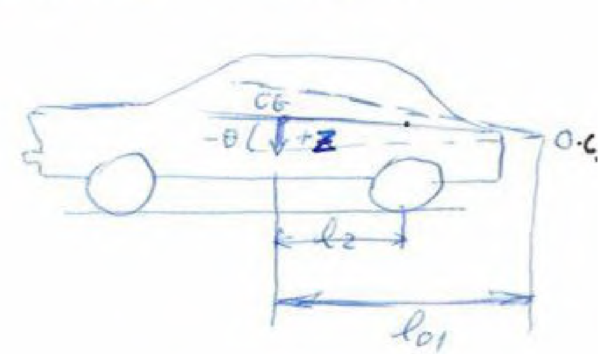
(اولاً) $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$ (rad/sec)

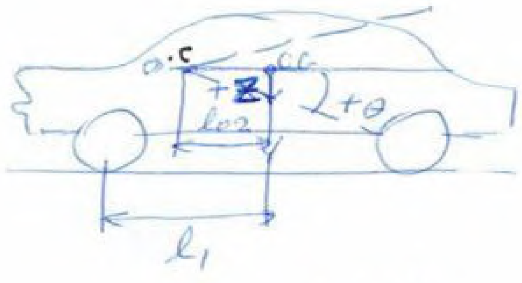
وتنادي بان صلابة الاطار هي أكبر من صلابة نوابض التعليق.

وثانياً - مصمم السيارة يفترض ان يضع في اعتباراته ان الكتلة غير المعلقة صغيرة (قليلة) قدر المستطاع.

The location of the o.c. (oscillation center) is denoted by (l_o) measured from the CG & can be determined from the amplitude ratios. Thus, one center is associated with ω_{n1} & other with ω_{n2}.

l_o : is the distance between CG & o.c.





oscillation center for pitch & bounce of sprung mass

center of oscillation:
The point where the body is oscillating about.

<u>For ω_{n1}</u>

$$l_{o1} = \frac{D_2}{\omega_{n1}^2 - D_1} \quad \text{--- (39) (31) 70}$$

<u>For ω_{n2}</u>

$$l_{o2} = \frac{D_2}{\omega_{n2}^2 - D_1} \quad \text{--- (40) (32) 71}$$

- When the value of amplitude ratios is (−), the o.c. will be located to the right of the CG of the vehicle body.
- when the value of amplitude ratio(l_o) is (+), the o.c. will be located to the left of CG of the vehicle body.

The body motion will be the sum of oscillation about the two centers. Usually the o.c that lies outside of the wheelbase is called (bounce center) & the associated <u>natural</u> frequency is called (bounce frequency). The o.c. that lies inside of wheelbase is called (pitch center) & the associated natural frequency called (pitch ~~frequency~~).

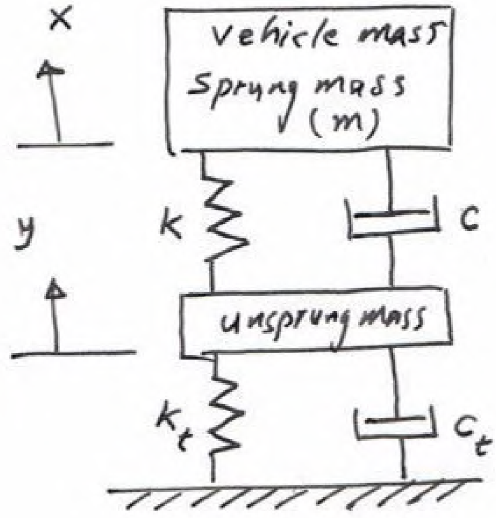
افضل شكل [illegible] ال O.C. [illegible]

$l_1 \cdot l_2 = r_y^2$ [illegible] ($l_{o2} = l_1$; $l_{o1} = l_2$) [illegible]

Two - Degrees - of - Freedom Model

إضافة ٢٤/١/٢٠١٢ ملخص ①

The displacement of the vehicle body will be defined by (x), whereas the displacement of the unsprung mass will be designated as (y) as shown in (Fig →).



Vehicle excited by the motion of the unsprung mass

ربع سيارة

The equation of motion for the vehicle mass is now:

$$M(\ddot{x}-\ddot{y})=$$

$$\cancel{M\ddot{x}} = -k(x-y) - c(\dot{x}-\dot{y}) \quad \text{— (a)}$$

letting $(z = x-y)$, (Eq a) can be written as:

$$M\ddot{z} = -c(\dot{x}-\dot{y}) - k(x-y) \quad \text{— (b)}$$

$$\cancel{M\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y}}$$

في هذه الحالة نفرض ان حركة الكتلة غير المعلقة (حركة توافقية)

Transmissibility is defined as the ratio of the transmitted force to the ratio of the exciting force.

Because in this case the exciting force is provided by the unsprung mass & tire, and as such is proportional to the displacement of the unsprung mass, The transmissibility is given by:

$$TR = \left|\frac{X}{Y}\right| = \sqrt{\frac{1+\left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left[2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}} \quad \text{— (c)}$$

معادلة محاضرة سابقة

ω – natural frequency of the unsprung mass system

ω_n – " " " vehicle " "

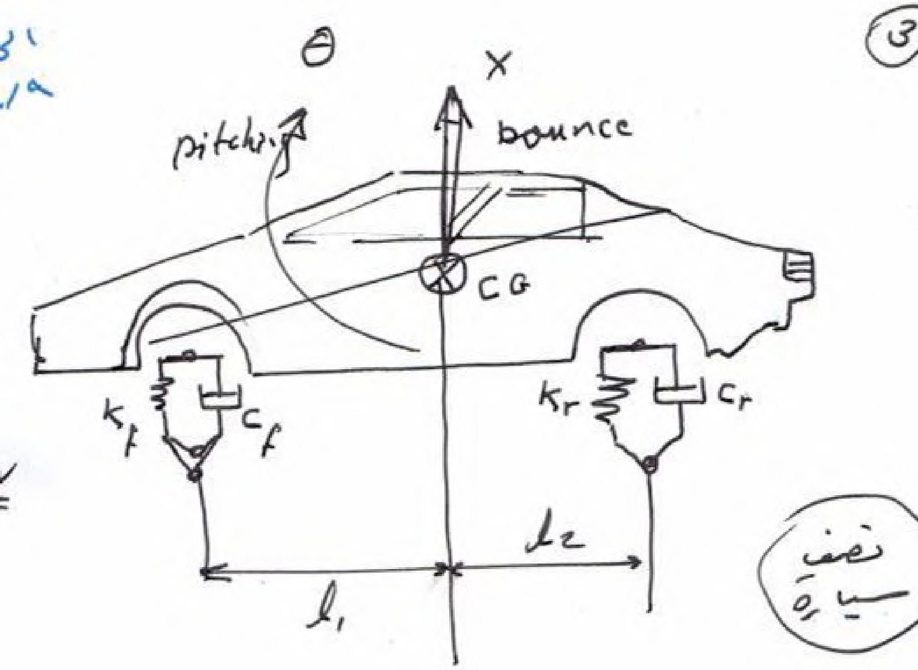
Dynamic index $DI = \frac{\cancel{k}\, r_y^2}{f l_1 . l_2}$

r_y ~~k~~ - radius of gyration of vehicle

$$r_y = \sqrt{\frac{I}{M}} \quad \text{—} \quad (*)$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m.r_y^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_f + c_r & c_f . l_1 - c_r . l_2 \\ c_f . l_1 - c_r . l_2 & c_f . l_1^2 + c_r l_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_f + k_r & k_f . l_1 - k_r l_2 \\ k_f l_1 - k_r . l_2 & k_f l_1^2 + k_r l_2^2 \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ M(t) \end{Bmatrix}$$

الأحد
٢٠١٢/١٢/٩

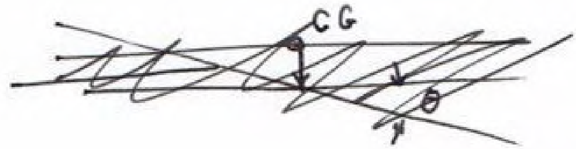


نصف سيارة

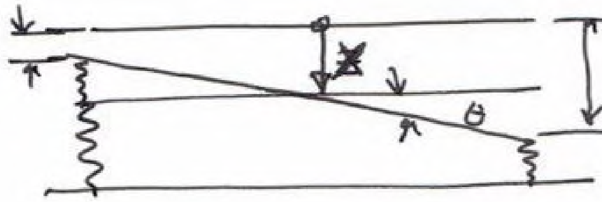
By Newton's <u>2nd law</u>

$$\Sigma F = m\ddot{x}$$
$$\Sigma M = I\ddot{\theta}$$

The eq. of bounce motion



$$m\ddot{x} = -K_f\,(x - l_1\theta) - K_r\,(x + l_2\theta) \quad \text{— (A)}$$



& for pitching

$$I_y.\ddot{\theta} = m_s \cdot r_y^2 \cdot \ddot{\theta} = K_f\,l_1\,(x - l_1\theta) - K_r\,l_2\,(x + l_2\theta) \quad \text{— (B)}$$

I_y - mass moment of inertia
r_y - radius of gyration of vehicle body about y-axis

Assume
$$D_1 = \frac{1}{m_s}(K_f + K_r)$$
$$D_2 = \frac{1}{m_s}(K_r\,l_2 - K_f\,l_1)$$
$$D_3 = \frac{1}{I_y}(K_f\,l_1^2 + K_r\,l_2^2) = \frac{1}{m_s . r_y^2}(K_f\,l_1^2 + K_r\,l_2^2)$$

باستخدام هذه الافتراضات في (A) و (B) تصبح

$$\ddot{x} + D_1 x + D_2\,\theta = 0 \quad \text{— (C)}$$
$$\ddot{\theta} + D_3\theta + \frac{D_2}{r_y^2} . x = 0 \quad \text{— (D)}$$

لاحظ D_2 هو المشترك بين الحركتين bounce و pitch.

Then motion couple when ($k_f . l_1 = k_r . l_2$)

بهذا الشرط اذا اثرنا بقوة في CG ستمتلك حركة عمودية فقط
واذا قوة خارج CG ستمتلك حركة تأرجحية فقط

ففي هذه الحالة تشكل الترددات الطبيعية للحركتين منفصلتين عن بعض

$$\omega_{n_x} = \sqrt{D_1} \quad \text{— (E)}$$

$$\omega_{n_\theta} = \sqrt{D_3} \quad \text{— (F)}$$

وتسمى هذه نادرة الحصول .

حل المعادلتين (A) و (B) هو

$$x = X \cos \omega_n t \quad \text{— (G)}$$

$$\theta = \Theta \cos \omega_n t \quad \text{— (H)}$$

X - amplitude of bounce motion

Θ - " pitch "

يعني بعد الاشتقاق مرتين

نعوض (G) و (H) في (C) و (D) نحصل

$$(D_1 - \omega_n^2) X + D_2 \Theta = 0 \quad \text{— (I)}$$

$$\left(\frac{D_2}{r_y^2}\right) X + (D_3 - \omega_n^2) \Theta = 0 \quad \text{— (J)}$$

بحل هاتين المعادلتين نحصل على

$$\omega_n^4 - (D_1 - D_3)\,\omega_n^2 + \left(D_1 D_3 - \frac{D_2^2}{r_y^2}\right) = 0 \quad \text{— (K)}$$

من (K) نحصل على ترددين طبيعيين

$$\omega_{n_1}^2 = \frac{1}{2}(D_1 + D_3) - \sqrt{\frac{1}{4}(D_1 - D_3)^2 + \frac{D_2^2}{r_y^2}} \quad \text{— (L)}$$

$$\omega_{n_2}^2 = \frac{1}{2}(D_1 + D_2) + \sqrt{\frac{1}{4}(D_1 - D_3)^2 + \frac{D_2^2}{r_y^2}} \quad \text{— (M)}$$

وهذين الترددين الطبيعيين للحركة المشتركة (العمودية والتأرجحية) تقعان خارج قيم الترددات الطبيعية ω_{nx} و $\omega_{n\theta}$.

$$\omega_{n_1}^2 = \frac{1}{2}(D_1 + D_3) - \sqrt{\frac{1}{4}(D_1 - D_3)^2 + \left(\frac{D_2}{r_y}\right)^2}$$

$$= 46.6 \ sec^{-2}$$

$$\therefore \omega_{n_1} = 6.83 \ s^{-1}$$

$$\text{or } f_{n_1} = \frac{\omega_{n_1}}{2\pi} = 1.09 \ Hz$$

$$\omega_{n2}^2 = \frac{1}{2}(D_1 + D_3) + \sqrt{\frac{1}{4}(D_1 - D_3)^2 + \left(\frac{D_2}{r_y}\right)^2}$$

$$= 84.7 \ sec^{-2}$$

$$\therefore \omega_{n2} = 9.2 \ sec^{-1}$$

$$\text{or } f_{n2} = \frac{\omega_{n2}}{2\pi} = 1.46 \ Hz$$

The location of oscillation centers can be determined using eqns (35) & (36)

<u>For ω_{n_1}</u> $\quad l_{o_1} = \left.\frac{Z}{\Theta}\right|_{\omega_{n_1}} = \frac{D_2}{\omega_{n_1}^2 - D_1} = \frac{10.4}{46.6 - 48.7} = -4.95 \ m$

&

<u>For ω_{n2}</u> $\quad l_{o2} = \left.\frac{Z}{\Theta}\right|_{\omega_{n2}} = \frac{D_2}{\omega_{n2}^2 - D_1} = \frac{10.4}{84.7 - 48.7} = +0.29 \ m$

This indicates that one O.C is situated at a distance of 4.95 m to the <u>right of CG.</u> & the other is located at distance of 0.29 to <u>the left of CG.</u>

amplitude ratio

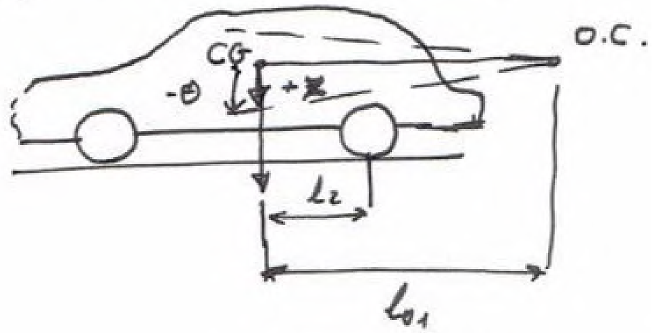
$$\left.\frac{X}{\Theta}\right|_{\omega_{n1}} = \frac{D_2}{\omega_{n1}^2 - D_1} \quad \text{---} \quad (*)$$

$$\left.\frac{X}{\Theta}\right|_{\omega_{n2}} = \frac{D_2}{\omega_{n2}^2 - D_1} \quad \text{---} \quad (**)$$

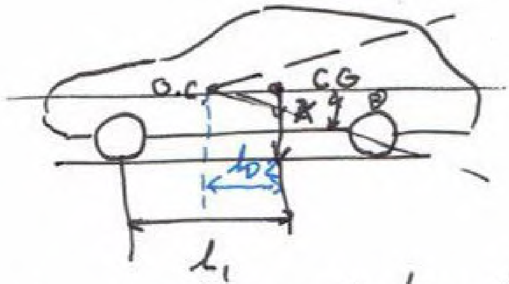
يكون اشارات متعاكسة

(ℓo) ان موقع (O.C) نرمز له: (oscillation center)

$l_{o1} = \dfrac{D_2}{\omega_{n1}^2 - D_1}$; $l_{o2} = \dfrac{D_2}{\omega_{n2}^2 - D_1}$ اذهب بكي فوق ، او صفر



- if the value of (l_o) is (−) the (O.C) will be to the right of CG of vehicle body



- if (l_o) is (+), (O.C) will be to left of (CG) of vehicle body

The body motion will be the sum of oscillation about the two centers.

(*) اذا وقع O.C خارج الـ l – Wheelbase) عندئذ يسمى بالـ (bounce center) والترددات الطبيعية لهذه الحالة تسمى (bounce frequency).

(*) اما اذا وقع (O.C) داخل حدود (Wheelbase) عندئذ يسمى (pitch center) والترددات الطبيعية لهذه الحالة تسمى (pitch frequency).

(*) افضل مكان اثناء التصميم للـ O.C. هو عندما

$$l_1 . l_2 = r_y^2 \xrightarrow[\text{عندما}]{\text{وهذا تتحقق}} (l_{o2} = l_1 \; ; \; l_{o1} = l_2)$$

ومن ثم المثال في الشفافات

Ex: Determine the pitch & bounce frequencies & the location of oscillation centers of an automobile with the following data:

sprung mass = 1500 kg
radius of gyration $r_y = 1.2\,m$
distance between front axle & CG = 1.4 m
" " rear " & CG = 1.7 m
front spring stiffness $K_f = 35\ kN.m^{-1}$
rear " " $K_r = 38\ kN.m^{-1}$

Then determine the amplitude ratios $\frac{Z}{\Theta}$ for each natural frequencies.

solution The constants D_1, D_2 & D_3 are first calculated as follows:

$$D_1 = \frac{K_f + K_r}{m_s} = \frac{35000 + 38000}{1500} = 48.7\ sec^{-2}$$

$$D_2 = \frac{K_r l_2 - K_f l_1}{m_s} = \frac{38000 * 1.7 - 35000 * 1.4}{1500} = 10.4\ m.s^{-2}$$

$$D_3 = \frac{K_f l_1^2 + K_r l_2^2}{m_s\, r_y^2} = \frac{35000 * 1.4^2 + 38000 * 1.7^2}{1500 * 1.2^2} = 82.6\ sec^{-2}$$

$$\left(\frac{D_2}{r_y}\right)^2 = 75.1\ sec^{-4}$$

$$D_3 + D_1 = 131.3\ sec^{-2}$$

$$D_3 - D_1 = 33.9\ sec^{-2}$$

The natural frequencies can be obtained as:

يعطى منه
ص ر ١١
انشاء
sheet 7

* vibration due to engine unbalance.

The reciprocating parts of the engine may cause vibration of an automobile due to the periodic disturbances which is of the type

$$F(t) = F_0 \sin \omega t + F_1 \sin 2\omega t + F_3 \sin 3\omega t + \cdots$$

The 1st term on the right hand side is responsible for primary unbalance and all other terms constitute higher harmonics.

To minimize the above effect, the engine is normally mounted on shock absorbers which may be assumed to consist of linear spring & viscous damper. Then the engine can be considered as a single (d.o.f) system

problems in vibration

H.W

Ex1 An engine of mass 500 kg is mounted on an elastic foundation of equivalent stiffness $7*10^5$ N/m. Determine the natural frequency of the system

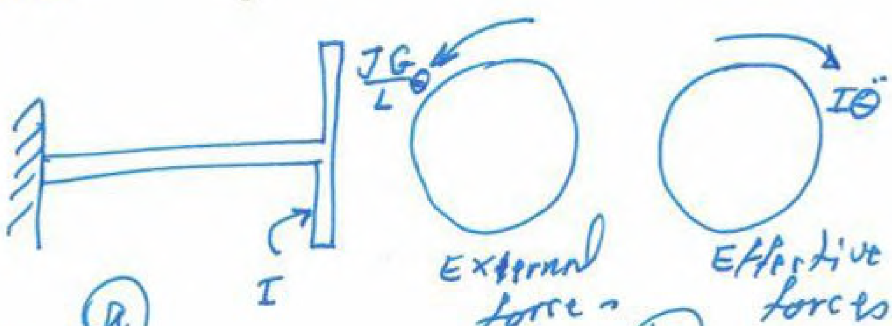
Sol.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{7*10^5}{500}} = 37.4 \text{ rad/sec.}$$

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = 5.96 \text{ HZ}$$

H.W

Ex2 A wheel is mounted on a steel shaft ($G = 83*10^9$ N/m²) of length (1.5 m) & radius ~~2~~ 0.8 cm. The wheel is rotated (5°) and released. The period of oscillation is observed as (2.3 sec). Determine the mass moment of inertia of the wheel.



Sol.

a

$$\left(\sum \vec{M}_o\right)_{ext.} = \left(\sum \vec{M}_o\right)_{eff.}$$

$$-\frac{JG}{L}\theta = I\ddot{\theta}$$

$$I\ddot{\theta} + \frac{JG}{L}\theta = 0 \qquad /I \Rightarrow \ddot{\theta} + \underbrace{\frac{JG}{IL}}_{\omega_n^2}\theta = 0$$

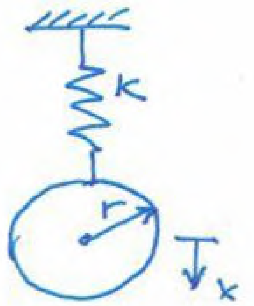
$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{JG}{IL}}$$

$$\therefore \ \omega_n = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi \ rad/sec.}{2.3} = 2.73 \ \frac{rad}{sec.}$$

thus the moment of inertia of the wheel is calculated from

$$I = \frac{JG}{L.\omega_n^2} = \frac{\frac{\pi}{2}(0.008m)^4 \left(83 * 10^9 \frac{N}{m^2}\right)}{(1.5m)\left(2.73 \ \frac{rad}{s}\right)^2} = 47.8 \, kg.m^2$$

EX8 // A sphere of radius r and mass m is attached to a spring of stiffness (K) - Fig below -. The assembly is placed in a highly viscous fluid of dynamic viscosity μ and mass density ρ. The sphere is displaced from its equilibrium configuration and released from rest. Derive the D.E. governing the resulting oscillations about the equilibrium Position. Note that the drag force on the sphere from the fluid is $(D = 2\pi r \mu v)$, where v is the velocity of sphere.



Sol. when the system is in equilibrium, a balance exists between the gravity force, the buoyant force & spring force.

$$\left[mg - F_B - K\cdot\delta_{st} = 0\right]$$

عندما تبدأ الكرة بالتأرجح فأن المائع حول الكرة
سيكون في حالة حركة

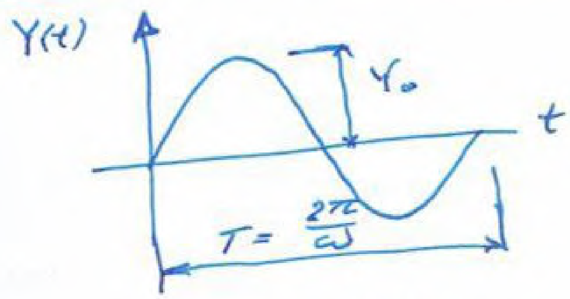
تبلها حتى حرة
معروفة للفروض الرياضية

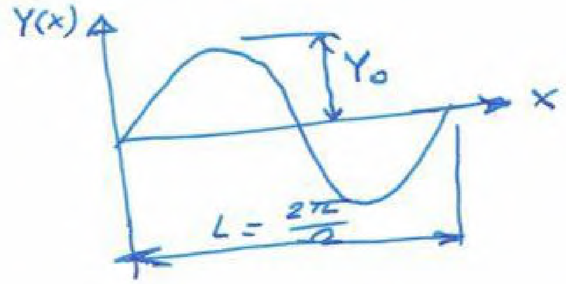
⊛ Irregularities of the road

① harmonic road ← غير موجود عمليًا

② arbitrary road ← التوصيف بخواص إحصائية لعدم الاستواء

[1] ⊛ Harmonic Behaviour for irregularities





بالاعتماد على زمن — بالاعتماد على مسافة — ①

due to time

$$Y(t) = Y_0 \sin\omega t = Y_0 \sin\omega t = Y_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}\right) t \quad \text{— (76)}$$

where Y_0 - amplitude

ω - Excitation angular frequency rad/sec.

T - period [s] — ②

& due to distance — (77)

$$Y(x) = Y_0 \sin\Omega x = Y_0 \sin\left(\frac{2\pi}{L}\right) x$$

Ω - angular frequency due to wave length [rad/s]

L - wave length of road [m] — (78)

⊛ if v is const. $\therefore x = vt$

عندما يكون $Y(t) = Y(x)$
وبمساواة المعادلتين (2, 1) (77, 76)

$$\omega t = \Omega x \quad \text{— (79)}$$

$$\omega \frac{x}{v} = \Omega x \Rightarrow \omega = \Omega v = \left(\frac{2\pi}{L}\right) v \quad \text{— (80)}$$

ففي حالة كون L ثابتة فإن ω تزداد بزيادة السرعة.

if a bysicle model on harmonic road:

أمامي $Y_f(t) = Y_0 \sin \omega t$ — (81)

التأخير الزمني

خلفي $Y_r(t) = Y_0 \sin \omega (t - \Delta t)$ — (82)

if $v = const. \Rightarrow \Delta t = \frac{L}{V}$

* في الفترات الزمنية

$\omega \Delta t = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$

سيحصل تأرجح عمودي فقط (bounce) ديسكون $[Y_f = Y_r]$

* اما اذا كانت

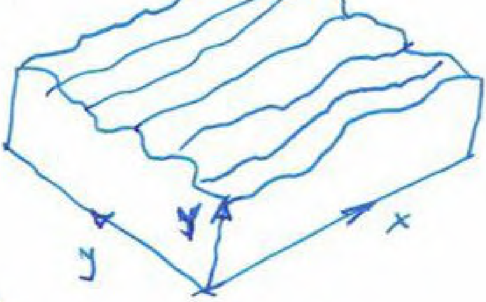
$\omega \Delta t = \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$

سيكون $[Y_f = -Y_r]$ سيحدث تأرجح دوراني فقط حول y (pitch)

* اما في الحالة العامة حيث $[Y_f \neq Y_r]$ ستحدث حركتين في آن واحد (pitch, bounce)

2 Arbitrary road

تعرض الخصائص الاحصائية لعدم استوائية الطريق



$Y = Y(x, y)$ — (83)

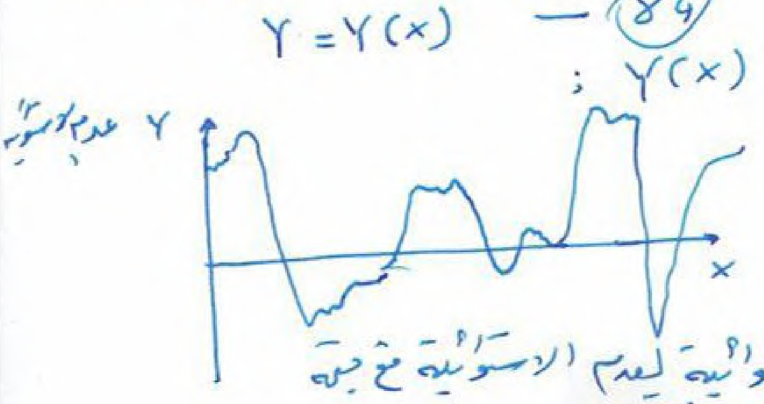
وهذا يعني ان ارتفاع عدم لا استوائية Y دالة لكل من x في اتجاه السير والمحور y.

2-1 Irregularity of road due to one wheel

يعبر عن الخصائص الاحصائية لعدم استواء الطريق في اتجاه حركة المركبة لدولاب واحد

$Y = Y(x)$ — (84)

; $Y(x)$: arbitrary function of middle value const. (zero).



الدالة العشوائية لعدم الاستوائية مع قيمة متوسطة صفرية