Course of Numerical Analysis

3^{rd} Class (All Branches)

الكتاب المنهجي : التحليل الهندسي والعددي التطبيقي/ (تأليف: د.حسن الدلفي + د.محمود عطا الله مشكور)

Numerical Methods for engineers / Steven C.Chapra – Raymond P. Canale

Chapter One

Solutions of Non Linear Equations

مقدمة :

المقصود بالمعادلة اللا خطية هي تلك المعادلة التي تحتوي على قوى مختلفة ل X أو دوال مثلثية أو أسية أو لوغارتمية.
مثلا"

$2X^2 – 4X-3 = 0$

معادلة لا خطية من الدرجة الثانية يمكن ايجاد الحل باستخدام طريقة الدستور
في حين لو حاولنا ايجاد حل للمعادلة :

$2x^4 +X^3-2X^2+4X-1 = 0$

او المعادلة :

$X = 2 \sin X$

نرى انه لا يوجد طريقة او نظرية او قانون محدد مباشر لايجاد جذور مثل هذه المعادلات لذلك يتم اللجوء الى استخدام الطرق العددية التقريبية لايجاد الحلول او الجذور وتكون الحلول غير مضبوطة وتقريبية بالمقارنة لو ان هناك حلول نظرية لهذه المعادلات.

Iterative Methods

1- Simple Iterative Method:-

In this method rearranging the function f(x) = 0, so that x is one of the left hand side of the equation.

$$X=g(x) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots 1$$

This transformation can be accomplished either by algebraic manipulation or by simple adding x to both side of the original equation.

For example:

Ex1.

F(x) = $x^2 - 2x + 3 = 0$, g(x) = x= $\frac{x^2+3}{2}$

Ex2.

F(x) = sinx

Adding x both side x = sinx+x , g(x) = sinx+x

Predict the value of x as a function of x, thus given an initial value at the root sub. In equation (1).

The equation (1) can be to compute a new estimate

Xi+1 as expressed by iteration.

Simple Iterative Method

1- نجعل الدالة = صفر
2- نضع x في طرف وبقية الدالة في الطرف الاخر بحيث يكون x=g(x)
3- في حالة وجود القيمة الابتدائية (initial value) نكون جدول ونعوض القيمة الابتدائية xi وبعد كل تكرار تصبح القيمة الجديدة (xi+1)هي القيمة الابتدائية في حالة عدم حدوث تقارب بينهما ونستمر لحين تقارب القيمة الابتدائية xi مع القيمة الجديدة (xi+1)new value
4- في حالة عدم وجود القيمة الابتدائية نرسم الدالة ونعطيها قيم موجبة وسالبة ونختبر القيم عند نقطة الانقلاب (تغير الاشارة من الوجب الى السالب او بالعكس)وذلك من خلال اشتقاق معادلة g(x) ونعوض هذه القيم فيها بحيث يكون $g'(x)<1$
5- يكون ترتيب الجدول للحصول على القيمة الجديدة

i	xi	xi+1=g(x)

The error can be determined by using the following equation.

$\in = |\ xi + 1 - xi\ | * 100\%$ --------------------------------2

Ex1/. Use Simple Iterative Method to calculate the root of $f(x) = e^{-X} - X$,use initial value 0.0000

sol.

For $x_{i+1}=g(x) = e^{-x}$

i	xi	$x_{i+1}=g(x)= e^{-x}$	∈%
0	0.0000	1.0000	100
1	1.0000	0.3687	71.8
2	0.3687	0.6922	46.9
3	0.6922	0.5004	38.3
4	0.5004	0.6062	
5			
6			
7			
.			
.			
.			
.	0.5671	0.5671	0

The true value $x^{*}=0.5671$

Ex2/ Find the root of the equation ($2x^3-7x+2 = 0$) using the simple iterative method.

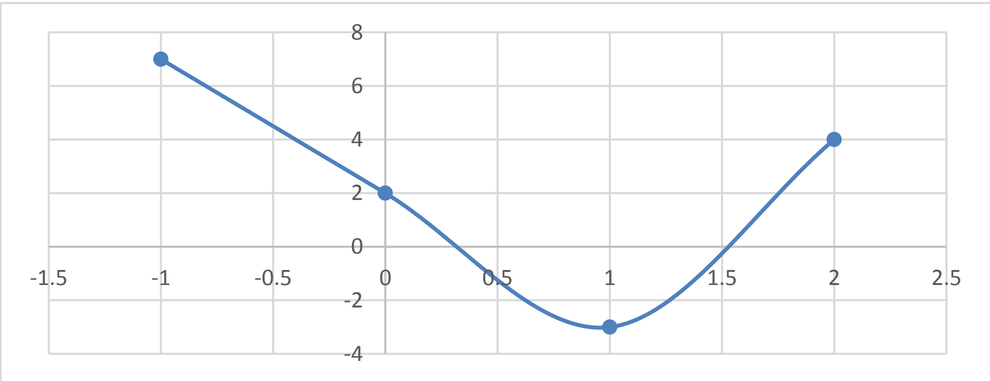
sol.

To find the initial value of the iteration xi we must graph the function

x	$y = 2x^3-7x+2$
-1	7
0	2
1	-3
2	4

تغير الاشارة

عند تجربة اختبار العدد 2-



To find the first root $0 \le x^* \le 1$

$$X_{i+1} = \frac{2}{7}(x^3+1)$$

$g'(x) = \frac{6}{7}x^2 \longrightarrow$ **$g'(0)=0 < 1$, $g'(1) = \frac{6}{7} < 1$ the solution is convergence**

i	xi	$x_{i+1} = \frac{2}{7}(x^3+1)$
0	1.000	0.5714
1	0.5714	0.3390
2	0.3390	0.2968

3	0.2968	0.2932
4	0.2932	0.2929
5	0.2929	0.2929

The value $x^* = 0.2929$

The 2nd root $1 \le x^* \le 2$, $g'(1) = \frac{6}{7} < 1$, $g'(2) = \frac{24}{7} > 1$ **the solution divergence ,therefore , the equation must be change**

$$X_{i+1} = \sqrt[3]{\frac{7}{2}x_i - 1} \quad , g'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{7}{2}x - 1\right)^{(-2/3)} * \frac{7}{2}$$

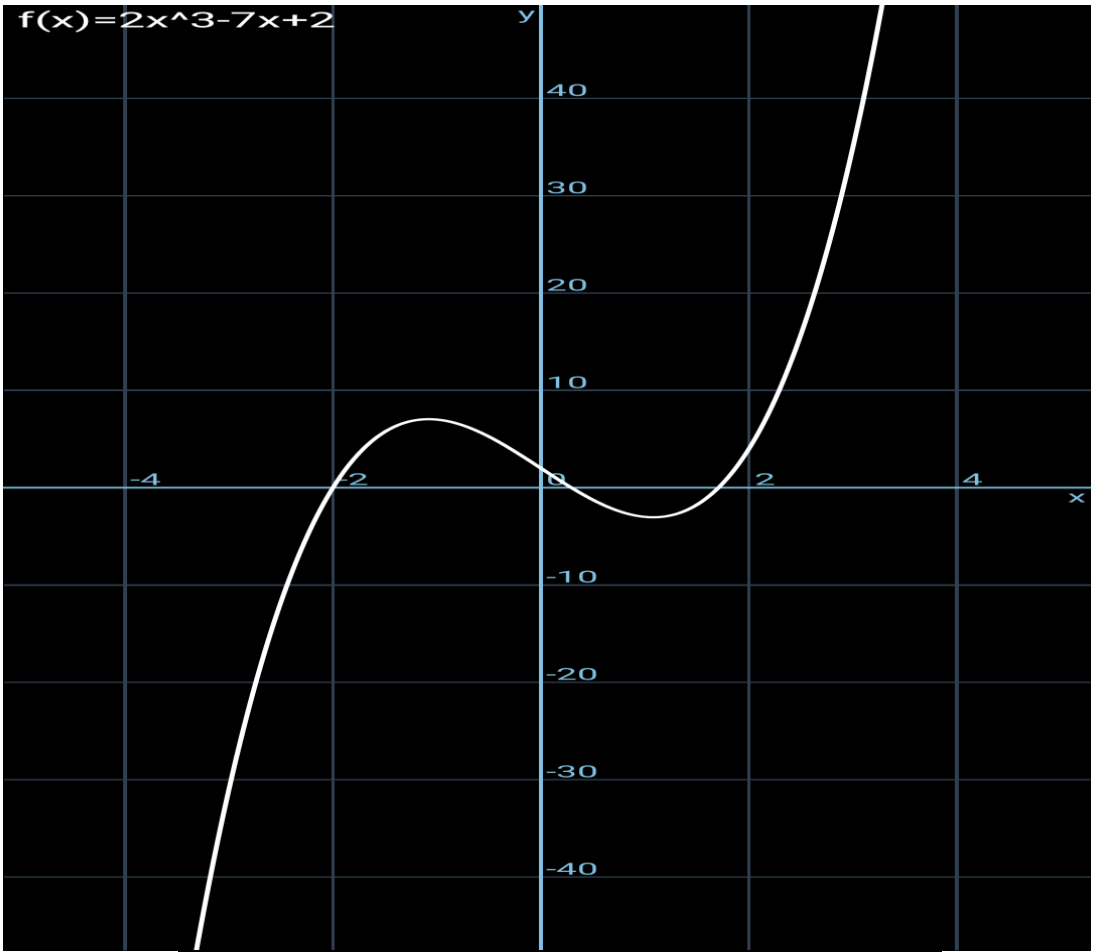
$g'(1) = 0.179 < 1$, $g'(2) = 0.3533 < 1$ then the solution is convergence

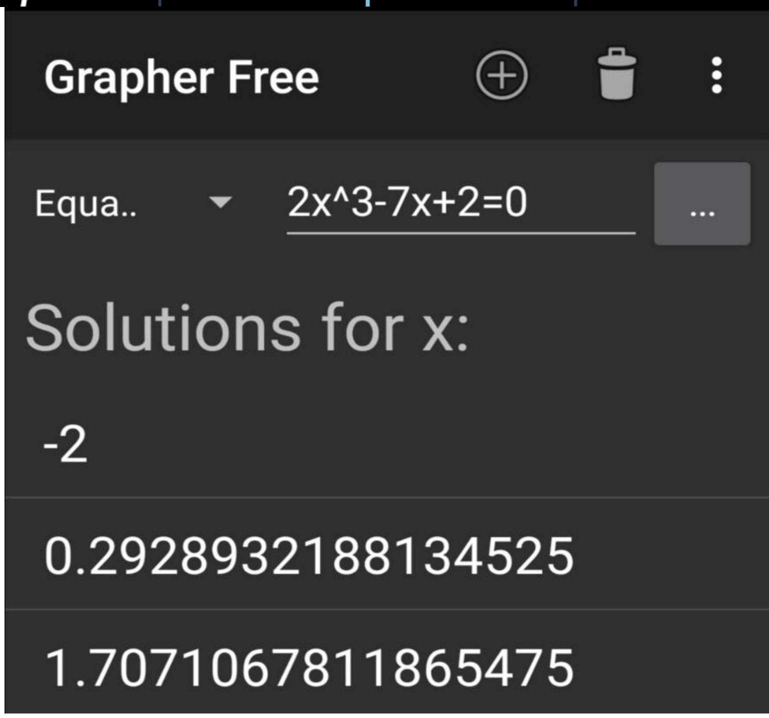
i	xi	$x_{i+1} = \sqrt[3]{\frac{7}{2}x_i - 1}$
0	1.000	1.3572
1	1.3572	1.5536
2	1.5536	1.6433
3	1.6433	1.6812
4	1.6812	1.6967
5	1.6967	1.7029
6	1.7029	1.7054
7	1.7054	1.7064
8	1.7064	1.7068
9	1.7068	1.7070
10	1.7070	1.7071
11	1.7071	1.7071

The value $x^* = 1.7071$

لفائدة الطلبة : بالامكان الاستفادة من برنامج Grapher Free من متجر play (للموبايل) لرسم الدوال

وايجاد الجذور بكل سهولة.





Ex3/ Find the root of the equation x= Cos x, using simple iteration method.

Sol.

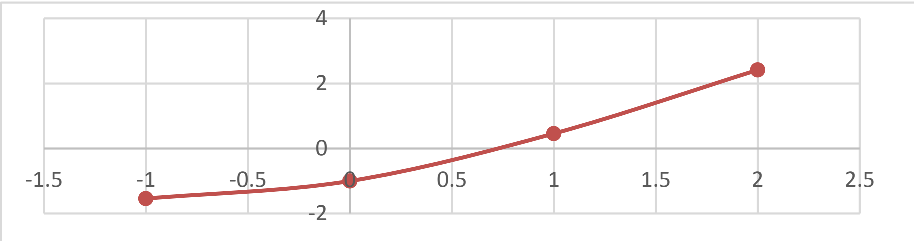
F(x) = x – cos (x) **to find initial value use graph**

g(x) = cos (x)

ملاحظة مهمة جدا: في حالة الدوال المثلثية تحول
الحاسبة الى . Rad

x	y= **x - cos (x)**
-1	- 1.54
0	- 1
1	+ 0.459
2	+ 2.416

تغير الاشارة



g′(x) = - sin(x), g′ (0) = 0<1, g′ (1) = 0.841<1 then the solution is convergence

i	xi	xi+1= **cos(x)**
0	0.00	1.00
1	1.00	0.54
2	0.54	0.86
3	0.86	0.65
4	0.65	0.79
5	0.79	0.70
6	0.70	0.76

The value $x^*=0.74$

7	0.76	0.72
8	0.72	0.75
9	0.75	0.73
10	0.73	0.74
11	0.74	0.74

Ex4/ Find the root of the equation $x^2 - 4 = \ln x$ use x_0 =1.000

Solve by simple iterative method.

Sol.

Xi+1= g(x) = $\sqrt{\ln x + 4}$

To check convergence: g´(x) = 0.5 $(\ln x + 4)^{-0.5}$ $(1/x)$

f (1) = 0.25 < 1 ….ok

i	xi	xi+1== $\sqrt{\ln x + 4}$
0	1.000	2.000
1	2.000	2.166
2	2.166	2.185
3	2.185	2.187
4	2.187	2.187

The value $x^* = 2.187$

Ex 5/ Find the root of the equation $2x^5$-2x-1= 0 use simple iterative method start with x_0= 0.000

Sol.

Xi+1=g(x) = $\sqrt[5]{\frac{2x+1}{2}}$

Check convergence..?

i	xi	$x_{i+1} = \sqrt[5]{\frac{2x+1}{2}}$
0	0.000	0.871
1	0.871	1.065
2	1.065	1.094
3	1.094	1.098
4	1.098	1.098

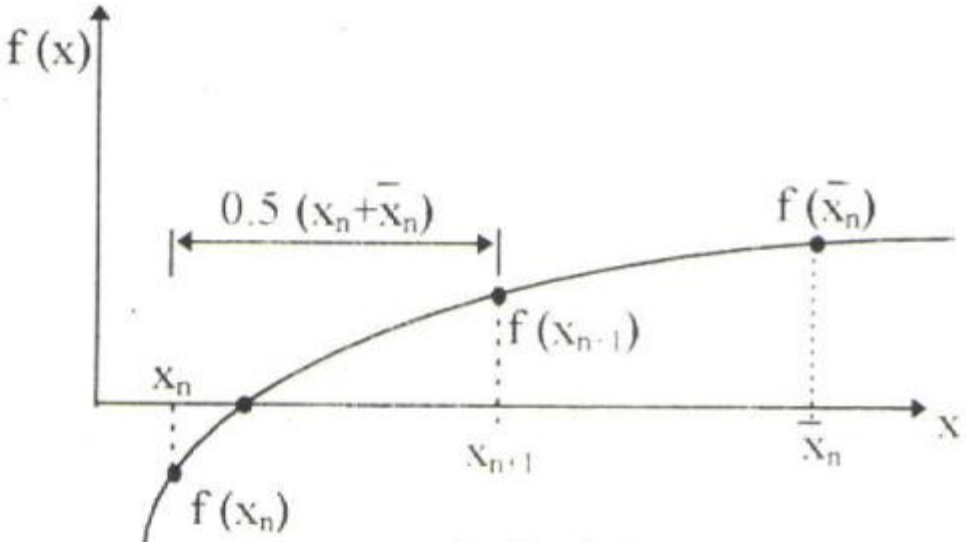
The value $x^* = 1.098$

2- ***Bisection Iterative Method:***

1- يشترط بهذه الطريقة وجود في السؤال شرطين حديين (Two initial values) .
2- يجب ان تكون الدالة $f(x)=0$.
3- يتم تعويض القيم الابتدائية المعطاة بالسؤال x_o, x'_o بالدالة لايجاد **$f(x)$, $f'(x)$ في التكرار الاول .**
4- في التكرار الثاني $i=1$ يتم حساب الدالة $f(x)$ من خلال حساب x_1

$$\mathbf{x_1} = \frac{1}{2}(x_o + x'_o) \qquad \text{...3}$$

5- تعوض قيمة x_1 في الدالة المعطاة لايجاد $f(x_1)$
6- يشترط ان تكون اشارة **$f(x)$, $f'(x)$ متغايرة بالاشارة. اي ان اذا كانت اشارة احدهما موجبة تكون الاخرى سالبة وبالعكس ويكون ذلك من اول تكرار لغاية نهاية الحل .**
7- **في التكرار $i=1$ لايجاد قيمة** x'_1 من خلال اختيار قيمة من التكرار السابق من قيمتي x_o ,x'_o بحيث يجعل اشارة **$f'(x)$ مغايرة لاشارة $f(x)$ وهكذا على طول الحل .**



Ex.6 / Find the root of the equation f(x) = $\frac{1}{x} + 1 = 0$ using method of bisection, assume an initial values x_o = -0.5, x'_o = -4. Perform the calculation to 4 Decimal places.

Sol.

i	x	f(x)	x′	f′(x)
0	-0.5000	-1.0000	-4.0000	0.7500
1	-2.2500	0.5556	-0.5000	-1.0000
2	-1.3750	0.2727	-0.5000	-1.0000
3	-0.9375	-0.0667	-1.3750	0.2727
4	-1.1563	0.1351	-0.9375	0.0667
5	-1.0469	0.0448	-0.9375	0.0667
6	- 0.9922	-0.0079	-1.0469	0.0448
.				
.				
10	-1.008	0.0008	-0.9991	-0.0010

. $x^{*}=\frac{1}{2}\left(-1.008+(-0.9991)\right)=-1.0035$

.

Applied Example

Ex.7/ for the isentropic flows of a perfect gas from reservoir through a Convergent- Divergent nozzle. Operating with sonic velocity at the throat, it may be shown that:

$$\frac{A^2{}_t}{A^2}=\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\left(\frac{2}{\gamma-1}\right)\left[\left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{2}{\gamma}}-\left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right]$$

Where (P) is the local pressure at cross sectional area (A), (A_t) is that area of throat, (P_0) is the stagnation pressure at the reservoir. $\gamma=1.41$, $A=0.12$, $A_t=0.1$, $P_0=100$. Find the local pressure P. Use ($P=22.0000$ and $P=28.0000$) as initial values and work 4D places.

Sol.

$$\frac{A^2{}_t}{A^2}=\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\left(\frac{2}{\gamma-1}\right)\left[\left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{2}{\gamma}}-\left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right]$$

$$f(p)=\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\left(\frac{2}{\gamma-1}\right)\left[\left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{2}{\gamma}}-\left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right]-\frac{A^2{}_t}{A^2}=0$$

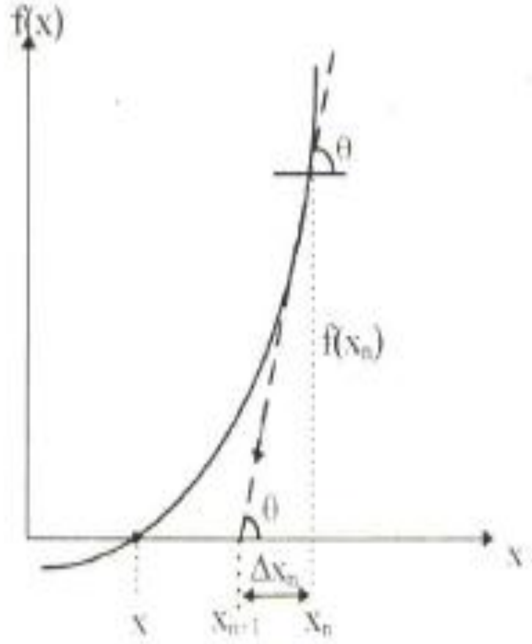
$$f(p)=14.5979\left[\left(\frac{p}{100}\right)^{1.4184}-\left(\frac{p}{100}\right)^{1.7092}\right]-0.6944=0$$

i	p	f(p)	p′	f′(p)
0	22.0000	-0.0873	28.0000	0.0480
1	25.0000	-0.0164	28.0000	0.0480
2	26.5000	0.0165	25.000	-0.0164
3	25.7500	0.0002	25.0000	-0.0164
4	25.3750	-0.0008	25.7500	0.0002
5	25.5625	-0.0038	25.7500	0.0002
6	25.6562	-0.0018	25.7500	0.0002
7	25.7031	-0.0007	25.7500	0.0002
8	25.7265	-0.0002	25.7500	0.0002

$p^{*}=\frac{1}{2}(25.7265+25.750)=25.7382$

2- *Newton Raphson method:-*

تعتبر هذه الطريقة اكثر فعالية للوصول إلى حالة التقارب (Convergence) إذا ما تم حل المعادلات اللاخطية بالطريقتين السابقتين وكما مبين في الشكل (2.5) لو كانت العملية التكراريـــا قد أوصلت التقريب عند النقطة (x_n)، إذن يراد زيادة صغيرة مقدارها (Δx_n) للوصول إلى الحل.



شكل (2.5)

يمكن تمثيل الدالة هذه بصيغة سلسلة تايلر (Taylor Series) وبالصيغة الآتية :

$$0 = f(x) = f(x_n) + \Delta x_n \frac{f'(x_n)}{1!} + \Delta x_n^2 \frac{f''(x_n)}{2!} + \dots$$

وبعد فرض Δx_n=small واعتبار الحدين الأولين لهذه السلسلة وإهمال الحدود من الدرجة الثانية فما فوق نحصل على :

أو :

$$f(x_n) + \Delta x_n f'(x_n) = f(x) = 0$$

$$\Delta x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

وهذه تؤدي إلى معادلة نيوتن- رافسن حيث أن :

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

وهناك طريقة بيانية لتمثيل هذه العلاقة شكل (2.5) أو (2.6) وكما يلي.

الانحدار عند المماس = tan θ لكن :

$$\tan\theta = \frac{f(x_n)}{\Delta x_n} = f'(x_n)$$

بما أن :

$$x_n = x_{n+1} + \Delta x_n$$

$$\therefore x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Ex8/ Find the root by using Newton-Raphson method and use initial value $x_0 = 1.7500$, f(x) = $\frac{1}{x} - 0.16$

<u>Sol.</u>

f′(x) = $-\frac{1}{x^2}$,

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$\frac{f(x)}{f'(x)}$	x_{i+1}
0	1.7500	0.4114	-0.3265	-1.2600	3.0100
1	3.0100	0.1722	-0.1103	-1.5611	4.5711
2	4.5711	0.0587	-0.0478	-1.2280	5.7991
3	5.7991	0.0124	-0.0297	-0.4175	6.2166
4	6.2166	0.0008	-0.0258	-0.0310	6.2476
5	6.2476	0.0000	-0.0256	-0.0000	6.2476

The value $x^*=6.2476$

The condition of convergence of Newton-Raphson method:

1- Let the root between (a),(b) $\quad a \le x \le b$

2- To check of convergence f(a) . f(b) < 0 , that means F(a) , f(b) opposite sign.

3-The derivative of $f'(a) \cdot f'(b) \neq 0$

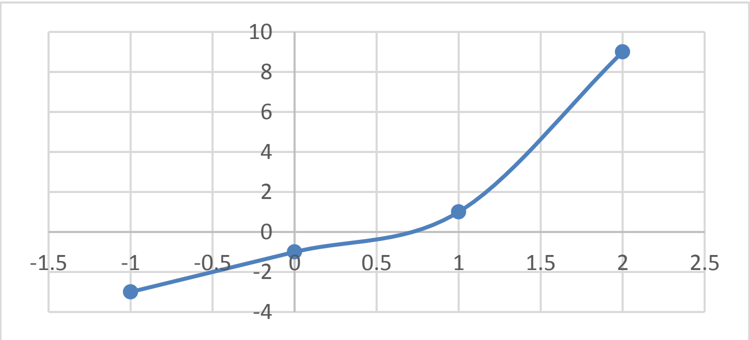
4- The second derivative don't change sign from a to b

Ex.9/ Prove the convergence conditions of Newton-Raphson method, then solve it (3D), $f(x) = X^3+X-1$

SOL. To find the initial value

x $\quad$ y= $\mathbf{X^3+X-1}$

x	f(x)
-1	-3
0	-1
1	1
2	9



ملاحظة : حدث تغير بالاشارة عند تعويض قيمة (X=0, X=1) اي الفترة من a----b نعوض هذه القيم في الدالة الاصلية ونعوضها ايظا بالمشتقة .

$F(0) = -1$, $f(1) = 1$

$f'(x) = 3x^2+1$ $f(0) \cdot f(1) = -1 < 0$ OK

$f'(0) = 1$, $f'(1) = 4$

$f'(0) \cdot f'(1) \neq 0$ OK

$F''(x) = 6x$

$f''(1) = 6 > 0$ OK … Converge

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$\frac{f(x)}{f'(x)}$	x_{i+1}
0	1.000	1.000	4.000	0.250	0.750
1	0.750	0.172	2.688	0.064	0.686
2	0.686	0.009	2.412	0.004	0.682
3	0.682	0.000	2.395	0.000	0.682

The value is $x^*=0.682$

Application of special cases for Newton-Raphson method:

A-Square root

Let n > 0, n any number

$X = \sqrt{n}$ -------------------------------------4

$X^2=n$

$X^2-n = 0 = f(x)$

$f'(x) = 2x$

خطوات الحل

1- نربع الطرفين
2- نساوي المعادلة الى الصفر
3- نشتق المعادلة

4- نحل بطريقة **Newton-Raphson method**

Ex.10/ Find the square root by Newton-Raphson method start x_i=3.0000, where n=10

Sol.

$X=\sqrt{10} \longrightarrow x^2=10$

$X^2-10=0=f(x)$

$f'(x)=2x$

$$x_{i+1}=x_i-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$\frac{f(x)}{f'(x)}$	x_{i+1}
0	3.000	-1.000	6.000	-0.1666	3.1667
1	3.1667	0.0279	6.3334	0.0044	3.1623
2	3.1623	0.0001	6.3246	0.0000	3.1623

The value is $x^*=3.1623$

B-Root of any arbitrary order:

Let n > 0, n any number

$X=\sqrt[k]{n}$ ------------------------------------5

$X^k=n$

$X^k-n=0=f(x)$

$f'(x)=k\,x^{k-1}$

خطوات الحل

1- نرفع طرفي المعادلة الى نفس قيمة k

2- نساوي المعادلة الى الصفر

3- نشتق المعادلة

4- نحل بطريقة **Newton-Raphson method**

Ex.10/ Find $\sqrt[3]{7}$ by Newton-Raphson method start $x_i = 1.50000$ take accuracy 5D

Sol.

$X=\sqrt[3]{7}$

$X^3=7$

$X^3-7= 0 = f(x)$

$f'(x) = 3X^2$

$$x_{i+1}= x_i - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$\frac{f(x)}{f'(x)}$	x_{i+1}
0	1.50000	-3.62500	6.7500	-0.53703	2.03704
1	2.03704	1.45276	12.44859	0.11670	1.92034
2	1.92034	0.08164	11.06311	0.00737	1.91297
3	1.91297	0.00042	10.9783	0.00003	1.91294
4	1.91294	0.00009	10.97801	0.00000	1.91294

The value is $x^*=1.91294$

C-The Reciprocal of any number:

Let $x = \frac{1}{n}$

$F(x) = \frac{1}{x} - n = 0$

$$\mathbf{f'(x) = -\frac{1}{x^2}}$$

Ex.11/ Find the Reciprocal of 2 using Newton-Raphson method start $x_i = 0.1000$

Sol.

$$X = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} - 2 = 0 \;,\; f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$\frac{f(x)}{f'(x)}$	X_{i+1}
0	0.1000	8.0000	-100.0000	-0.0800	0.1800
1	0.1800	3.5555	-3.08641	-0.1151	0.2951
2	0.2951	1.3886	-11 4831	-0.1204	0.4160
3	0.4160	0.4038	-5.7784	-0. 0698	0.4858
4	0.4858	0.0584	- 4.2372	-0.0137	0.4995
5	0.4995	0.0020	- 4.0080	-0.0004	0.4999
6	0.4999	0.0004	- 4.0016	-0.0000	0.4999

The value is $x^* = 0.4999$

Chapter Two

Solution of Simultaneous Linear Algebraic Equation

The following linear system of equation:

$$a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 + \dots\dots\dots\dots + a_{1n}\,x_n = b_1$$

$$a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 + \dots\dots\dots\dots + a_{2n}\,x_n = b_2$$

$$a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 + \dots\dots\dots\dots + a_{3n}\,x_n = b_3$$

$$a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + a_{m3}\,x_3 + \dots\dots\dots\dots + a_{mn}\,x_n = b_m$$

where:

a_{ij} $i=1,2,3,\dots\dots\dots m$

$j=1,2,3,\dots\dots\dots\dots n$

$X_1, X_2, X_3,\dots\dots\dots X_n$ variable

$b_1, b_2, b_3,\dots\dots\dots b_m$ constant

The above system can be written in the form:

$$\begin{bmatrix} a11 & a12 \dots & a1n \\ a21 & a21 \dots & a2n \\ a31 & a32 \dots & a3n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ . \\ xn \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b1 \\ b2 \\ . \\ bn \end{bmatrix}$$

$A\,X = B$

To solve the above system we have two types of methods:

A- The direct methods

- The matrix inversion method
- The Gauss elimination method
- The Gauss Jordon method

B- The indirect methods

- Jacob's method
- Gauss Seidel method

Types of matrix:

1- Upper Triangular Matrix

$$\begin{bmatrix} a11 & a12 & a13 \\ 0 & a22 & a23 \\ 0 & 0 & a33 \end{bmatrix}$$

2- Lower Triangular Matrix

$$\begin{bmatrix} a11 & 0 & 0 \\ a21 & a22 & 0 \\ a31 & a32 & a33 \end{bmatrix}$$

3-Digonal Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & a12 & a13 \\ a21 & 1 & a23 \\ a31 & a32 & 1 \end{bmatrix}$$

4-Unit Matrix I

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A-The Direct Methods:

1-The matrix inversion method AX=B to find the variable x by matrix inverse

$X=A^{-1}B$

$A^{-1}= AI$

EX1. Use the inverse of matrix to solve the following linear equations.

$3x_1 - 6x_2 + 7x_3 = 3$

$9x_1 \quad - 5x_3 = 3$

$5x_1 - 8x_2 + 6x_3 = -4$

$$A=\begin{bmatrix}3 & -6 & 7\\9 & 0 & -5\\5 & -8 & 6\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix}X1\\X2\\X3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}3\\3\\-4\end{bmatrix}$$

AX = B

$$\begin{bmatrix}3 & -6 & 7\\9 & 0 & -5\\5 & -8 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X1\\X2\\X3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\3\\-4\end{bmatrix}$$

To find A^{-1}

1- يتم ضرب المصفوفة A بمصفوفة الوحدة I (Unit matrix)

$$\begin{bmatrix}3 & -6 & 7 & : & 1 & 0 & 0\\9 & 0 & -5 & : & 0 & 1 & 0\\5 & -8 & 6 & : & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

2- هنالك خطوات يجب اتباعها بحيث نجعل قيم المصفوفة A ← مصفوفة الوحدة من خلال الخطوات التتالية :

New $Row_1=Row_1/$ a11

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 2.33 & : & 0.33 & 0 & 0\\9 & 0 & -5 & : & 0 & 1 & 0\\5 & -8 & 6 & : & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

New $Row_2 = Row_2 - \frac{a21}{a11} Row_1$

New $Row_3 = Row_3 - \frac{a31}{a11} Row_1$

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 2.33 & : & 0.33 & 0 & 0\\0 & 18 & -26 & : & -3 & 1 & 0\\0 & 2 & -5.65 & : & -1.65 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

New Row_2=Row_2/ a22

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2.33 & : & 0.33 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1.44 & : & -0.17 & 0.06 & 0 \\ 0 & 2 & -5.65 & : & -1.65 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

New Row_1= Row_1- $a12$ Row_2

New Row_3= Row_3- $a32$ Row_2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.55 & : & -0.01 & 0.12 & 0 \\ 0 & 1 & -1.44 & : & -0.17 & 0.06 & 0 \\ 0 & 0 & -2.77 & : & -1.31 & -0.12 & 1 \end{bmatrix}$$

New Row_3=Row_3/ a33

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.55 & : & -0.01 & 0.12 & 0 \\ 0 & 1 & -1.44 & : & -0.17 & 0.06 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & 0.48 & 0.04 & -0.36 \end{bmatrix}$$

New Row_1= Row_1- $a13$ Row_3

New Row_2= Row_2- $a23$ Row_3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 0.26 & 0.14 & -0.2 \\ 0 & 1 & 0 & : & 0.52 & 0.12 & -0.52 \\ 0 & 0 & 1 & : & 0.48 & 0.04 & -0.36 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.26 & 0.14 & -0.2 \\ 0.52 & 0.12 & -0.52 \\ 0.48 & 0.04 & -0.36 \end{bmatrix}$$

$X = A^{-1}B$

$$\begin{bmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.26 & 0.14 & -0.2 \\ 0.52 & 0.12 & -0.52 \\ 0.48 & 0.04 & -0.36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0.26)(3)+ & (0.14)(3)+ & (-0.2)\,(-4) \\ (0.52)(3)+ & (0.12)(3)+ & (-0.52)(-4) \\ (0.48)(3)+ & (0.04)(3)+ & (-0.36)(-4) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \longrightarrow X_1=2, X_2=4, X_3=3$$

2- The Gauss Elimination Method

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

- From this method the matrix is $[aij \;:\; b]$

$$\begin{bmatrix} a11 & a12 & a13 & :b1 \\ a21 & a22 & a23 & :b2 \\ a31 & a32 & a33 & :b3 \end{bmatrix}$$

- We will get an upper triangular matrix.

$$\begin{bmatrix} a11 & a12 & a13 \\ 0 & a22 & a23 \\ 0 & 0 & a33 \end{bmatrix}$$

- Use back substitution to find x_1 , x_2 , x_3

$x_3 = b_3 / a_{33}$ ---------------------- ----a

$x_2 = (b_2 - a_{23}\, x_3) / a_{22}$ --------------------b

$x_3 = (b_1 - a_{12}\, x_2 - a_{13}\, x_3) / a_{11}$ ------------------c

EX2. Find the solution of the following matrix using Gauss elimination method, working 4D.

$2.37\, X_1 + 3.06\, X_2 - 4.28 X_3 = 1.76$
$1.46\, X_1 - 0.78\, X_2 + 3.75 X_3 = 4.69$

$-3.69\, X_1 + 5.13\, X_2 - 1.06 X_3 = 5.74$

SOL.

$$\begin{bmatrix} 2.37 & 3.06 & -4.28 & :1.76 \\ 1.46 & -0.78 & 3.75 & :4.69 \\ -3.69 & 5.13 & 1.06 & :5.74 \end{bmatrix}$$

Use an upper triangular matrix.

New Row_2= $Row_2 - \frac{a21}{a11} Row_1$

New Row_3= $Row_3 - \frac{a31}{a11} Row_1$

$$\begin{bmatrix} 2.37 & 3.06 & -4.28 & :1.76 \\ 0 & -2.6650 & 6.3865 & :3.6058 \\ 0 & 9.8944 & -5.604 & :8.4803 \end{bmatrix}$$

New Row_3= $Row_3 - \frac{a32}{a22} Row_2$

$$\begin{bmatrix} 2.37 & 3.06 & -4.28 & :1.76 \\ 0 & -2.6650 & 6.3865 & :3.6058 \\ 0 & 0 & 18.1072 & :21.8676 \end{bmatrix}$$

Use back substitution to find x_1, x_2, x_3

$x_3 = b_3/a_{33} = \frac{21.8676}{18.1072} = 1.2077$

$x_2 = (b_2 - a_{23}x_3)/a_{22} = (3.6058-(6.3865(1.2077)))/-2.6650$

$x_2 = 1.5412$

$x_3 = (b1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)/a_{11}$

$x_3 = (1.76-(3.06)(1.5412)-(-4.28)(1.2077))/2.37$

$x_3 = 0.9337$

3- The Gauss Jordon Method

From the matrix $[A \;:\; b]$ and by some elimination step change the matrix to $[I \;:\; b']$

EX3. Solve the following linear equation using Gauss Jordon method.

$$2X_1 - 4X_2 + 6X_3 = 5$$
$$X_1 + 3X_2 - 7X_3 = 2$$
$$7X_1 + 5X_2 + 9X_3 = 4$$

SOL.

نجعل المصفوفة بصيغة $[A \;:\; b]$

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 & :5 \\ 1 & 3 & -7 & :2 \\ 7 & 5 & 9 & :4 \end{bmatrix}$$

نستخدم نفس الخطوات التي استخدمناها في طريقة inverse of matrix اتحويلها الى Unit matrix

$$[A \;:\; b] \longrightarrow [[I \;:\; b']]$$

قيم x_1 , x_2 , x_3 سوف تكون هي قيم b' الجديدة

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 & :5 \\ 1 & 3 & -7 & :2 \\ 7 & 5 & 9 & :4 \end{bmatrix}$$

New Row_1=Row_1/ a11

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & :2.5 \\ 1 & 3 & -7 & :2 \\ 7 & 5 & 9 & :4 \end{bmatrix}$$

New Row_2= Row_2 - $\frac{a21}{a11}$ Row_1

New Row_3= Row_3 - $\frac{a31}{a11}$ Row_1

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & :2.5 \\ 0 & 5 & -10 & :-0.5 \\ 0 & 19 & -12 & :-13.5 \end{bmatrix}$$

New Row_2= Row_2 / a22

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & :2.5 \\ 0 & 1 & -2 & :-0.1 \\ 0 & 19 & -12 & :-13.5 \end{bmatrix}$$

New Row_1 = Row_1- $a12$ Row_2

New Row_3 = Row_3- $a32$ Row_2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & : 2.3 \\ 0 & 1 & -2 & : -0.1 \\ 0 & 0 & 26 & : -11.6 \end{bmatrix}$$

New Row 3=Row3/ a33

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & : 2.3 \\ 0 & 1 & -2 & : -0.1 \\ 0 & 0 & 1 & : -0.44 \end{bmatrix}$$

New Row 1= Row 1- $a13$ Row 3

New Row 2= Row 2- $a23$ Row 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : 1.86 \\ 0 & 1 & 0 & : -0.98 \\ 0 & 0 & 1 & : -0.44 \end{bmatrix}$$

X_1=1.86, X_2= - 0.98, X_3= - 0.44

ملاحظة مهمة : ان من اهم المشاكل في الحل هي القسمة على صفر او ضهور او وجود قيم غير منطقية في الحل ولغرض تحسين الحل هنالك تقنيات للحل .

1- PIVOTING (التمركز)

تعتبر من اهم الطرق الفعالة لتجنب القسمة على صفر وذلك من خلال البحث على اكبر قيمة مطلقة لمعامل المجهول . ويكون ذلك من خلال تبديل الاسطر ويسمى PARTIAL PIVOTING

EX4. By using partial pivoting, solve the following system equation.

$2X_2 = 0$

$4X_1 + 2X_2 + 3X_3 = -2$

$6X_1 + X_2 - 6X_3 = 6$

SOL.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & :0 \\ 4 & 2 & 3 & :-2 \\ 6 & 1 & -6 & :6 \end{bmatrix}$$

عند الحل بطريقة Gauss elimination method لايمكن الحل لانه عند تطبيق

New $Row_2 = Row_2 - \frac{a21}{a11} Row_1$

لايمكن لان قيمة a11 يساوي صفرلذا يجب تبديل الاسطر (اي تبديل المعاملات)

Replace Row_3 by Row_1

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & -6 & :6 \\ 4 & 2 & 3 & :-2 \\ 0 & 2 & 0 & :0 \end{bmatrix}$$

نستخدم نفس الخطوات كما في المثال الثاني .

2- Scaling (التدرج)

هو اجراء يستخدم لتعديل معاملات مجموعة المعادلات الخطية من خلال جعل قيمتها غير متفاوتة. حيث ان في بعض الاحيان تكون معاملات مجموعة المعاملات الخطية ذات قيم او مقادير متفاوتة مثلا مايكروفولت مع كيلو فولت حيث تكون معاملات ذات ارقام كبيرة واخرى صغيرة وهذا يؤدي الى اخطاء في البرنامج الحسابي .

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 100 \\ -1 & 3 & 100 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 105 \\ 102 \\ 2 \end{bmatrix}$$

To find the values of x_1, x_2, x_3 use Gauss elimination method and use Techniques to improve the solution.

نلاحظ هنا وجود قيم متفاوتة اي قيم كبيرة واخرى صغيرة لذا يجب عمل Scaling.

المقصود بهذه العملية هو قسمة كل صف على اكبر قيمة لمعاملاته. اي نقسم الصف الاول على 100 و, والصف الثاني على 100 والصف الثالث على 2 .

$$\begin{bmatrix} 0.03 & 0.02 & 1 & : 1.05 \\ -0.01 & 0.03 & 1 & : 1.02 \\ 0.5 & 1 & -0.50 & : 1 \end{bmatrix}$$

Use partial pivoting by replace Row1 by Row 3

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 1 & -0.5 & : 1 \\ -0.01 & 0.03 & 1 & : 1.02 \\ 0.03 & 0.02 & 1 & : 1.05 \end{bmatrix}$$

To find x_1 , x_2 , x_3 use Gauss elimination method

New $Row_2 = Row_2 - \frac{a21}{a11} Row_1$

New $Row_3 = Row_3 - \frac{a31}{a11} Row_1$

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 1 & -0.5 & : 1 \\ 0 & 0.05 & 0.99 & : 1.04 \\ 0 & -0.04 & 1.03 & : 0.99 \end{bmatrix}$$

New $Row_3 = Row_3 - \frac{a32}{a22} Row_2$

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 1 & -0.5 & : 1 \\ 0 & 0.05 & 0.99 & : 1.04 \\ 0 & 0 & 1.822 & : 1.822 \end{bmatrix}$$

Use back substitution, $X_1=1$, $X_2=1$, $X_3=1$

B-The indirect methods

- Jacob's method
- Gauss seidel method

Note : In this method we have a sufficient condition for a solution to be found to check the convergence which is

$|aii| > \sum_{i=1}^{n} |aij|$ i=1,2,3----n, j≠i

EX5. To check the convergence

$5X_1 - 2X_2 + X_3 = 4$

$X_1 + 4X_2 - 2X_3 = 3$

$X_1 + 2X_2 + 4X_3 = 17$

Sol.

To check the convergence

$|5| > |-2| + |1| \longrightarrow 5 > 3$

$|4| > |1| + |-2| \longrightarrow 4 > 3$

$|4| > |1| + |2| \longrightarrow 4 > 3$

ملاحظة 1: في حالة عدم تحقق ذلك يجب استبدال المعادلات وتعاد العملية من جديد

ملاحظة 2 : في الطرق الغير مباشرة تعتمد على عملية التكرار

- Jacob's method

لغرض اجراء عملية التكرار نستخدم المعادلات التالية :

$$x_1^{r+1} = (b1 - a_{12}x_2^r - a_{13}x_3^r)/_{a_{11}} --------1$$

$$x_2^{r+1} = (b2 - a_{21}x_1^r - a_{23}x_3^r)/_{a_{22}} --------2$$

$$x_3^{r+1} = (b3 - a_{31}x_1^r - a_{32}x_2^r)/_{a_{33}} --------3$$

Where:

r = 0,1,2,3----n   (old value)

r+1 $\longrightarrow$ (new value)

EX6. Solve the following set of linear equations using Jacob's method.

$8X_1+X_2-X_3=8$
$X_1-7X_2+2X_3=-4$

$2X_1+X_2+9X_3=12$

Sol.

To check the convergence

$|8|>|1|+|-1| \longrightarrow 8>2$

$|-7|>|1|+|+2| \longrightarrow 7>3$

$|9|>|2|+|1| \longrightarrow 9>3$

خطوات الحل :

Step 1. Assume $X_1=X_2=X_3=$ zero

Step 2. Sub. X_1 , X_2 , X_3 in equations 1,2,3

Step 3. In new iteration the values of X_1^{r+1} ,X_2^{r+1} ,X_3^{r+1}

Become X_1^r ,X_2^r ,X_3^r

اي ان في التكرار الثالث i=2 فان القيم المستخدمة من التكرار الثاني هي X_1^r ,X_2^r ,X_3^r ونستمر بالحل لحين الحصول على حالة التقارب .

$$x_1^{r+1}=(8-x_2+x_3)/_8$$

$$x_2^{r+1}=(-4-x_1-2x_3)/_{-7}$$

$$x_3^{r+1}=(12-2x_1-x_2)/_9$$

$$X_1^{r+1} = 1 - 0.125X_2^r + 0.125X_3^r$$

$$X_2^{r+1} = 0.571 + 0.143X_1^r + 0.286X_3^r$$

$$X_3^{r+1} = 1.333 - 0.222X_1^r - 0.111X_2^r$$

r	x_1	x_2	x_3
0	0	0	0
1	1	0.571	1.333
2	1.095	1.095	1.048
3	0.994	1.027	0.969
4	0.993	0.990	0.998
5	1.001	0.998	1.003
6	1.001	1.001	1.000
7	1.000	1.000	1.000
8	1.000	1.000	1.000

$X_1=1$, $X_2=1$, $X_3=1$

-
- Gauss seidel method

This method is a faster than Jacob's method.

لغرض اجراء عملية التكرار نستخدم المعادلات التالية :

$$x_1^{r+1} = (b1 - a_{12}x_2^r - a_{13}x_3^r)/_{a_{11}} \text{ -------- } 1$$

$$x_2^{r+1} = (b2 - a_{21}x_1^{r+1} - a_{23}x_3^r)/_{a_{22}} \text{ -------- } 2$$

$$x_3^{r+1} = (b3 - a_{31}x_1^{r+1} - a_{32}x_2^{r+1})/a_{33} --------- 3$$

EX7. Solve the following set of linear equations using Gauss Seidel method

$5X_1 - 2X_2 + X_3 = 4$

$X_1 + 4X_2 - 2X_3 = 3$

$X_1 + 2X_2 + 4X_3 = 17$

Sol.

To check the convergence

$|5| > |-2| + |+1| \longrightarrow 5 > 3$

$|4| > |1| + |-2| \longrightarrow 4 > 3$ convergence

$|4| > |1| + |2| \longrightarrow 4 > 3$

خطوات الحل :

1- في التكرار الاول في حالة لم يعطي اي قيم ابتدائية نفرض $x_2 = x_3 = \text{zero}$ ونعوضها في معادلة 1 لايجاد قيمة x_1^{r+1}

2- لايجاد قيمة x_2^{r+1} في التكرار الاول نعوض عن $x_3 = \text{zero}$ ونعوض عن قيمة x_1^{r+1} التي تم استخراجها من الخطوة السابقة في معادلة 2

3- لايجاد قيمة x_3^{r+1} ايظا في اول تكرار من خلال تعويض قيمتي x_1^{r+1}، x_2^{r+1} في معادلة 3 .

4- لاكمال التكرات نطبق المعادلات مع مراعاة قيمة x^r من التكرار السابق اما قيمة x^{r+1} من نفس التكرار الذي نعمل به وهكذا يستمر الحل لحين الوصول الى التقارب .

$$x_1^{r+1} = 0.8 + 0.4x_2^r - 0.2x_3^r$$

$$x_2^{r+1} = 0.75 - 0.25x_1^{r+1} + 0.5x_3^r$$

$$x_3^{r+1} = 4.25 - 0.25x_1^{r+1} - 0.5x_2^{r+1}$$

r	**x_1**	**x_2**	**x_3**
0	0.8	0.55	3.775
1	0.265	2.571	2.898
2	1.249	1.887	2.994
3	0.956	2.008	3.007
4	1.002	2.003	2.998
5	0.999	2.000	3.000
6	1.000	2.000	3.000

$X_1=1$, $X_2=2$, $X_3=3$

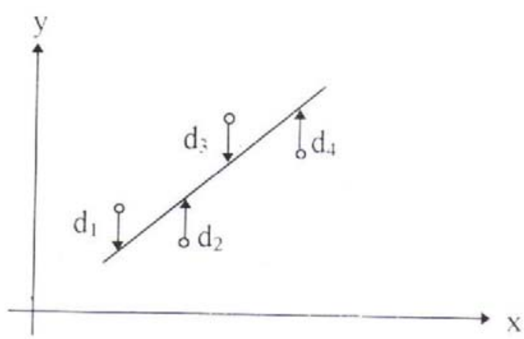
Chapter Three

Curve Fitting

الغرض من هذا الموضوع هو معالجة الاخطاء الناجمة عن اجهزة القياس او معالجة القيم الغير دقيقة لذا وجدت علاقات لتعديل مسار هذه القيم او النقاط المرسومة.

- **<u>Linear Regression</u>** (الانحدار الخطي)

$Y'=a_0+a_1x$ … 1



d: division يمثل انحدار النقاط عن الخط المستقيم

$d=Y-Y'$

$d=Y-a_0-a_1x$

$d_1=Y_1-Y_1'$

$d_2=Y_2-Y_2'$

$d_m=Y_m-Y_m'$

<u>ملاحظة</u> 1: ان افضل تطابق يكون عندما هذه الانحرافات اقل مايمكن اي ان

($d_1,d_2 \dots\dots d_m,$) اقل مايمكن .

ملاحظة 2 : يجب ايجاد مجموع هذه الانحرافات عن الخط المستقيم ولتفادي ان يكون الناتج النهائي يساوي صفر وذلك لانه قد تكون قيمة هذه الانحرافات سالبة وموجبة لذا ناخذ مربع مجموع هذه الانحرافات .

$$S = \sum_{i=1}^{m} d^2 = (\text{Y}' - a_0 - a_1 x)^2 \qquad \ldots \qquad 2$$

ملاحظة 3 : المهم في هذا الفصل هو ايجاد قيم a_0 ، a_1 من خلال اجراء التفاضل الجزئي بالنسبة الى a_0 ، a_1 ومساواة المعادلات الى الصفر .

$$\frac{\partial s}{\partial a_0} = -2\sum_{i=1}^{m} (\text{y}_i - a_0 - a_1 x) = 0 \qquad \ldots \qquad 3$$

$$\frac{\partial s}{\partial a_1} = -2\sum_{i=1}^{m} (\text{y}_i - a_0 - a_1 x)x = 0 \qquad \ldots \qquad 4$$

Rearrange equation (3) & (4)

$-2\sum y_i + 2\sum a_0 + 2a_1 \sum x_i = 0$ Divided by 2

$$\sum y_i = m a_0 + \sum x_i\, a_1 \qquad \ldots \qquad 5$$

Also eq. 4

$$(-2\sum y_i + 2\sum a_0 + 2\sum a_1 x_i)x_i = 0$$

$-2\sum y_i x_i + 2\sum a_0 x_i + 2\sum a_1 x_i^2 = 0$ Divided by 2

$$\sum y_i\, x_i = \sum a_0\, x_i + \sum a_1\, x_i^2 \qquad \ldots \qquad 6$$

Note :

m : number of points

$$\sum a_0 = m a_0$$

by solution equations (5) &(6) by Gauss-elimination method

$$a_0 = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i y_i}{m \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \qquad \dots \qquad 7$$

$$a_1 = \frac{m \sum x_i y_i - \sum x_i y_i}{m \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \qquad \dots \qquad 8$$

Ex1. Use linear regression to fit the following experimental data.

x	1	3	4	6	8	9	11	14
y	1	2	4	4	5	7	8	9

The linear regression

$$y = a_0 + a_1 x$$

To find a_0 ،a_1

$$a_0 = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i y_i}{m \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$a_1 = \frac{m \sum x_i y_i - \sum x_i y_i}{m \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

i	x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i
1	1	1	1	1
2	3	2	9	6
3	4	4	16	16
4	6	4	36	24
5	8	5	64	40
6	9	7	81	63
7	11	8	121	88
8	14	9	196	126
	$\sum x_i = 56$	$\sum y_i = 40$	$\sum x_i^2 = 524$	$\sum x_iy_i = 364$

$$a_0 = \frac{40 * 524 - 56 * 364}{8 * 524 - (56)^2} = \frac{6}{11}$$

$$a_1 = \frac{8 * 524 - 56 * 40}{8 * 524 - (56)^2} = \frac{7}{11}$$

$$y = \frac{6}{11} + \frac{7}{11}x$$

<u>Application of Linear Regression:</u>

هنالك بعض الطرق يتم اللجوء لها في حالة كون النقاط او العلاقة بين النقاط علاقة غير خطية. لذا يكون الانحدار الخطي غير مجدي.

- **<u>Exponential equation :</u>**

$$y = a_0 e^{a_1} x \quad \ldots \quad 9$$

ملاحظة : لتحويل معادلة 9 الى علاقة خطية ناخذ ln للطرفين:

$$\ln y = \ln a_0 + a_1 x$$

: Linear Regression عند المقارنة مع

$$m a_0 + \sum x_i\, a_1 = \sum y_i$$

$$\sum a_0\, x_i + \sum a_1\, x_i^2 = \sum y_i\, x_i$$

لتحويل هاي المعادلات الى الصيغة الاسية :

$$m \ln a_0 + \sum x_i\, a_1 = \sum \ln y_i \quad \ldots \quad 10$$

$$\sum \ln a_0\, x_i + \sum a_1\, x_i^2 = \sum \ln y_i\, x_i \quad \ldots \quad 11$$

EX. 2 The following data were plotted and show to exhibit behavior that described by the function $y = a_0 e^{a_1} x$

Evaluate the unknown a_0, a_1.

x	1	1.25	1.5	1.75	2
y	5.1	5.79	6.53	7.45	8.46

Sol.

$$\ln y = \ln a_0 + a_1 x$$

$$m \ln a_0 + \sum x_i\, a_1 = \sum \ln y_i$$

$$\sum \ln a_0 \, x_i + \sum a_1 \, x_i^2 = \sum \ln y_i \, x_i$$

m = 5

i	x_i	y_i	$\ln y_i$	x^2	$x_i \ln y_i$
1	1	5.1	1.6292	1	1.6292
2	1.25	5.79	1.7561	1.5625	2.195
3	1.5	6.53	1.8764	2.2500	2.814
4	1.75	7.45	2.0082	3.0625	3.514
5	2	8.46	2.1353	4.000	4.270
	$\sum 7.5$	$\sum 33.3$	$\sum 9.405$	$\sum 11.875$	$\sum 14.422$

$$5 \ln a_0 + 7.5 a_1 = 9.405$$

$$7.5 \ln a_0 + 11.875 a_1 = 14.4222$$

Use Gauss-elimination method

$a_1 = 0.5035$

$\ln a_0 = 1.1257$

$\ln y = \ln a_0 + a_1 \, x$

$\ln y = 1.1257 + 0.5035 \, x$

$y = 3.082 \, e^{0.5035x}$

Power equation :

$y = a_0 x^{a_1}$

وبتحويل المعادلة الى خط مستقيم ناخذ **log** للطرفين

$\log y = \log a_0 + a_1 \log x$

الصيغة العامة:

$$m a_0 + \sum x_i \, a_1 = \sum y_i$$

$$\sum a_0 \, x_i + \sum a_1 \, x_i^2 = \sum y_i \, x_i$$

$$m \log a_0 + \sum a_1 \log x_i = \sum \log y_i$$

$$\sum \log x_i a_0 + \sum (\log x_i)^2 a_1 = \sum \log x_i \log y_i$$

Ex.3 Fit the data in the following table using logarithmic transformation of the data.

x	4	4.3	4.5	4.7	5	5.5	6	6.3	6.8	7.2
y	10.3	11.5	13	14.3	16.5	19.5	22.5	25.5	30	33

Sol.

$y = a_0 x^{a_1}$

$\log y = \log a_0 + a_1 \log x$

$$m \log a_0 + \sum a_1 \log x_i = \sum \log y_i$$

$$\sum \log x_i a_0 + \sum (\log x_i)^2 a_1 = \sum \log x_i \log y_i$$

i	x_i	y_i	$\log x_i$	$\log y_i$	$(\log x)^2$	$\log x_i \log y_i$
1	4	10.3	0.6021	1.0128	0.3624	
2	4.3	11.5	0.6355	1.0607	0.40128	
3	4.5	13	0.6532	1.1139	0.4266	
4	4.7	14.3	0.6720	1.1553	0.4517	
5	5	16.5	0.6989	1.2174	0.4885	
6	5.5	19.5	0.7403	1.2900	0.5481	
7	6	22.5	0.7781	1.3521	0.6055	
8	6.3	25.5	0.7993	1.4065	0.6389	
9	6.8	30	0.8325	1.4771	0.6930	
10	7.2	33	0.8573	1.5185	0.7350	
			$\sum 7.2675$	$\sum 12.6047$	$\sum 5.3512$	$\sum 9.300$

$$10 \log a_0 + 7.2675 a_1 = 12.6047$$

$$7.2675 \log a_0 + 5.3514 a_1 = 9.300$$

Use Gauss-elimination method

$$\begin{bmatrix} 10 & 7.2675 & 12.6047 \\ 7.2675 & 5.3514 & 9.300 \end{bmatrix}$$

New Row 2= Row 2- $\frac{a21}{a11}$ Row 1

$$\begin{bmatrix} 10 & 7.2675 & 12.6047 \\ 0 & 0.06974 & 0.13953 \end{bmatrix}$$

$a_1 = 2.0007$

$\log a_0 = -0.19303$

$a_0 = 0.824$

$y = 0.824\, X^{2.007}$

Polynomial Regression:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 - - \; - - + a_n x^n$$

$$m a_0 + a_1 \sum x_i + a_2 \sum {x_i}^2 \;\; + \cdots + a_n \sum x^n = \sum y_i$$

$$a_0 \sum x_i + a_1 \sum {x_i}^2 \;\; + a_2 \sum {x_i}^3 \;\; + \cdots + a_n \sum x^{n+1} \; = \sum y_i \, x_i$$

$$a_0 \sum {x_i}^2 \;\; + a_1 \sum {x_i}^3 \;\; + a_2 \sum {x_i}^4 \;\; + \cdots + a_n \sum x^{n+2} \; = \sum y_i \, x_i^2$$

في حالة second order

$$\begin{bmatrix} m & \sum x_i & \sum {x_i}^2 \\ \sum x_i & \sum {x_i}^2 & \sum {x_i}^3 \\ \sum {x_i}^2 & \sum {x_i}^3 & \sum {x_i}^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i \, x_i \\ \sum y_i \, x_i^2 \end{bmatrix}$$

ملاحظة : يجب ان تكون عدد المعادلات بقدر المجاهيل

EX. 4 Fit a second order polynomial to the data in the following table .

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	8	22	29	32	42	42	47	54	56	58

Sol.

ملاحظة : ذكر في السؤال second order اي ان متعدد الحدود من الدرجة الثانية اي ان n=2

$$ma_0 + a_1 \sum x_i + a_2 \sum x^2{}_i + \cdots + a_n \sum x^n = \sum y_i$$

$$a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i{}^2 \quad + a_2 \sum x_i{}^3 \quad + \cdots + a_n \sum x^{n+1} \; = \sum y_i \, x_i$$

$$a_0 \sum x_i{}^2 \quad + a_1 \sum x_i{}^3 \quad + a_2 \sum x_i{}^4 \quad + \cdots + a_n \sum x^{n+2} \; = \sum y_i \, x_i^2$$

$$m = 10 , \sum x_i = 55 , \sum y_i = 390 , \sum x_i{}^2 \quad = 385 ,$$

$$\sum x_i{}^3 \quad = 3025 , \sum x_i{}^4 \quad = 25333 , \sum y_i \, x_i = 2574 ,$$

$$\sum y_i \, x_i^2 = 19526$$

$$10a_0 + 55a_1 + 385a_2 = 390$$

$$55a_0 + 385a_1 + 3025a_2 = 2574$$

$$385a_0 + 3025a_1 + 25333a_2 = 19526$$

Use Gauss-elimination method

$a_0 = 1.7333 \quad , \quad a_1 = 9.5333 \quad , a_2 = -0.3939$

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$y = 1.7333 + 9.5333x - 0.3939x^2$$

Chapter four

Interpolation

- **<u>Linear Interpolation:</u>**

هذا النوع من الاستكمال هو ايجاد اي نقطة بين نقطتين

Find the slope of curve

Slope = tan(θ) = $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$

Slope between (x_0 , x_1) equal Slope between (x_0 ,x)

$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$= --------------------------------1

But $x_1 - x_0$=h and x= $x_0 + uh$ -------------------2

Sub. 2 in 1

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{h} = \frac{f(x)-f(x_0)}{uh} = \text{-------------------------------}3$$

$$f(x) = f(x_0) + u[f(x_1) - f(x_0)] \text{------------------------} 4$$

$$f(x) = f(x_0) + u\Delta f(x_0) \text{-----------------------------------}5$$

Or :

$$f(x) = f_0 + u\Delta f_0 \text{---}7$$

<u>Note :</u>

$$\Delta f_0 = f_1 - f_0 = f(x_1) - f(x_0)$$

$$\Delta f_1 = f_2 - f_1 = f(x_2) - f(x_1)$$

Ex.1 For the following table find the value of ln 9.2 using Linear Interpolation .

x	f(x)=ln(x)
9.0	2.1972
9.5	2.2512
10.0	2.3026

Sol.

$f(x) = f_0 + u\Delta f_0$

To find u

x= $x_0 + uh$, $h = x_1 - x_0$

$x - x_0 = u(x_1 - x_0)$

$$u = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{9.2 - 9.0}{9.5 - 9.0} = 0.4$$

$\ln 9.2 = \ln 9.0 + 0.4[\ln 9.5 - \ln 9.0] = 2.219$

- **Quadratic Interpolation:**

في هذا النوع من الاستكمال يتطلب وجود ثلاثة نقاط x_0, x_1, x_2 فعند ايجاد اي نفطة بينهما نلجا الى هذا الاستكمال.

$$f(x) = f_0 + u\Delta f_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 f_0 \text{ ----------------------8}$$

$\Delta^2 f_0 = \Delta(\Delta f) = \Delta f_1 - \Delta f_0$

$\Delta^2 f_0 = \Delta(\Delta f) = (f_2 - f_1) - (f_1 - f_0)$

$\Delta^2 f_0 = \Delta(\Delta f) = f_2 - 2f_1 + f_0$

Ex. 2 For the following table find the value of ln 9.2 when ln 10.0 is considered.

x	f(x)= (x)
9.0	2.1972
9.5	2.2512
10.0	2.3026

<u>Sol.</u>

$$f(x) = f_0 + u\Delta f_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 f_0$$

To find u

x= $x_0 + uh$, $h = x_1 - x_0$

$$x - x_0 = u(x_1 - x_0)$$

$$u = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{9.2 - 9.0}{9.5 - 9.0} = 0.4$$

X_0 =9.0

X_1=9.5

X_2=10.0

$$f(9.2) = 2.1972 + 0.4(2.2512 - 2.197) + \frac{0.4(0.4-1)}{2!} + [2.3026 - 2(2.251 + 2.1972)] = 2.192$$

- **Newton forward and backward interpolation formula**

- **Newton forward interpolation formula:**

تعتمد هذه الطريقة على الفروق الامامية **(forward difference) ويرمز لها Δ** ، حيث يرمز للفروق ذات الرتبة الاولى Δf ، والرتبة الثانية $\Delta^2 f$، والرتبة الثالثة $\Delta^3 f$ وهكذا.

$$\Delta f_0 = f_1 - f_0$$

$$\Delta f_1 = f_2 - f_1$$

$$\Delta f_2 = f_3 - f_2$$

$$\Delta f_n = f_{n+1} - f_n$$

$$\Delta^2 f_0 = \Delta(\Delta f) = \Delta f_1 - \Delta f_0$$

$$\Delta^2 f_0 = \Delta(\Delta f) = (f_2 - f_1) - (f_1 - f_0)$$

$$\Delta^2 f_0 = \Delta(\Delta f) = f_2 - 2f_1 + f_0$$

$$\Delta^2 f_1 = \Delta(\Delta f_1) = \Delta f_2 - \Delta f_1$$

$$\Delta^2 f_1 = \Delta(\Delta f_1) = f_3 - 2f_2 + f_1$$

<u>Table of forward differences</u>

x	$f(x)$	Δ	Δ^2	Δ^3
x_0	f_0			
?		Δf_0		
x_1	f_1		$\Delta^2 f_0$	
		Δf_1		$\Delta^3 f_0$
x_2	f_2		$\Delta^2 f_1$	
		Δf_2		$\Delta^3 f_0$
x_3	f_3		$\Delta^2 f_2$	
		Δf_3		
x_4	f_4			

ملاحظة 1 : نستخدم هذه الطريقة عندما القيم المجهولة في بداية الجدول.

ملاحظة 2 : يشترط بهذه الطريقة ان يكون الفرق بين قيمة x والقيمة التي تليها متساوية h= constant

The Relation of Newton forward interpolation:

$$f(x) = f_0 + \frac{\Delta f_0}{1!}u + \frac{\Delta^2 f_0}{2!}u(u-1) + \frac{\Delta^3 f_0}{3!}u(u-1)(u-2) + - - \quad \text{--------------------------------}7$$

المسافة بين نقطة واخرى : h

القيمة المجهولة : X

القيمة التي قبلها حسب المسار المختار : x_0

Ex.3 Construct **Newton forward interpolation on the interval (3.5-----3.7) for the function ($y=e^x$) using h= 0.05**

x	**3.5**	**3.55**	**3.6**	**3.65**	**3.7**
$y=e^x$	**33.115**	**34.813**	**36.598**	**38.457**	**40.44**

Sol.

x	$f(x)$	Δ	Δ^2	Δ^3
3.5	**33.115**			
		1.698		
3.55	**34.813**		**0.087**	
		1.785		**0.005**
3.60	**36.598**		**0.092**	
		1.877		**0.003**
3.65	**38.457**		**0.095**	
		1.972		
3.7	**40.447**			

$$f(x) = f_0 + \frac{\Delta f_0}{1!}u + \frac{\Delta^2 f_0}{2!}u(u-1) + \frac{\Delta^3 f_0}{3!}u(u-1)(u-2) + --$$ ---1

$$u = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x - 3.5}{0.05}$$

0.05u =x-3.5

$u = \frac{1}{0.05}(x-3.5)$

u= 20(x-3.5) ---2

Sub.(2) in (1).

$$f(x) = 33.115 + 1.698 * 20(x-3.5) + \frac{0.087}{2}\big(20(x-3.5)(20(x-3.5)-1)\big) + \frac{0.005}{6}(20(x-3.5)(20(x-3.5)-1)(20(x-3.5)-1-2))$$ ----------------3

ملاحظة : معادلة (3) هي معادلة يمكن تطبيقها لاستكمال الامامي وان قيم x مجهولة لانه لم يحدد القيمة المراد ايجادها . فمثلا لو كانت القيمة المجهولة بين 3.5 ،3 لكان بالامكان تعويضها في معادلة (3) وتم ايجاد القيمة المجهولة .

Ex.4 The following data from steam table :

T (C^o)	**140**	**150**	**160**	**170**	**180**
P (N/cm^2)	**3.685**	**4.854**	**6.302**	**8.076**	**10.225**

Find the pressure of the steam for a temperature 142 C^o

Sol.

T (C^o)	P (N/cm^2)	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
140	**3.685**				
		1.169			
150	**4.854**		**0.279**		
		1.448		**0.047**	
160	**6.302**		**0.326**		**0.002**
		1.774		**0.049**	
170	**8.076**		**0.375**		
		2.149			
180	**10.225**				

$$f(x) = f_0 + \frac{\Delta f_0}{1!}u + \frac{\Delta^2 f_0}{2!}u(u-1) + \frac{\Delta^3 f_0}{3!}u(u-1)(u-2) + --$$ --1

$$u = \frac{x - x_0}{h} = \frac{142 - 140}{10} = 0.2$$

$$p(142) = 3.685 + \frac{1.169}{1!}(0.2) + \frac{0.279}{2!}0.2(0.2-1) + \frac{0.047}{3!}0.2(0.2-1)(0.2-2) + \frac{0.002}{4!}0.2(0.2-1)(0.2-2)(0.2-3) = 3.898$$

- **Newton backward interpolation formula:**

تعتمد هذه الطريقة على الفروق الخلفية **(backward difference) ويرمز لها** ∇، حيث يرمز للفروق ذات الرتبة الاولى ∇f ، والرتبة الثانية $\nabla^2 f$ ، والرتبة الثالثة $\nabla^3 f$ وهكذا.

$$\nabla f_1 = f_1 - f_0$$

$$\nabla f_0 = f_0 - f_{-1}$$

$$\nabla f_n = f_n - f_{n-1}$$

$$\nabla^2 f_n = \nabla(\nabla f) = \nabla f_n - \nabla f_{n-1}$$

$$\nabla^2 f_n = \nabla(\nabla f) = f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}$$

$$\nabla^3 f_n = \nabla(\nabla^2 f) = f_n - 3f_{n-1} + 3f_{n-2} - f_{n-3}$$

Table of backward differences

x	$f(x)$	∇	∇^2	∇^3
x_0	f_0			
		∇f_1		
x_1	f_1		$\nabla^2 f_2$	
		∇f_2		$\nabla^3 f_3$
x_2	f_2		$\nabla^2 f_3$	
		∇f_3		$\nabla^3 f_4$
x_3	f_3		$\nabla^2 f_4$	
?		∇f_4		
x_4	f_4			

ملاحظة : نستخدم هذه الطريقة اذا كانت القيمة المجهولة في اسفل الجدول
ويشترط ان يكون h= constant

The Relation of Newton forward interpolation:

$$f(x) = f_0 + \frac{\nabla f_0}{1!}u + \frac{\nabla^2 f_0}{2!}u(u+1) +$$
$$\frac{\nabla^3 f_0}{3!}u(u+1)(u+2) + - - \quad \text{-------------------------------}8$$

المسافة بين نقطة واخرى : h

القيمة المجهولة : X

القيمة التي بعدها حسب المسار المختار : x_0

$$u = \frac{x - x_0}{h}$$

Ex. 5 Given the following function $y = \log_{10} x$ .Find

by using $y = \log_{10}(1044)$ for x(1000---1050) , h=10 interpolation method .

x	$y = \log_{10} x$	∇	∇^2	∇^3	∇^4
1000	**3.0000**				
		0.00432			
1010	**3.00432**		**-0.000426**		
		0.004278		**0.0008**	
1020	**3.00860**		**-0.000418**		**0.0001**
		0.00423		**0.0009**	
1030	**3.01283**		**-0.000409**		**0**
		0.00419		**0.0009**	
1040	**3.017033**		**-0.000401**		
		0.00415			
1050	**3.021189**				

$$u = \frac{x - x_0}{h} = \frac{1044 - 1050}{10} = -0.6$$

$$\mathrm{f}(x) = f_0 + \frac{\nabla f_0}{1!}u + \frac{\nabla^2 f_0}{2!}u(u+1) + \frac{\nabla^3 f_0}{3!}u(u+1)(u+2) +$$

$$f(\log_{10} 1044) = 3.021189 + \frac{0.00415}{1!}(-0.6) + \frac{-0.000401}{2!}(-0.6)(-0.6+1) + \frac{0.0009}{3!}(-0.6)(-0.6+1)(-0.6+2) + \frac{0.0001}{4!}(-0.6)(-0.6+1)(-0.6+2)(-0.6+3) = 3.01887$$

Lagrange interpolation formula

ملاحظة : نستخدم هذه الطريقة لايجاد الدالة المجهولة عند نقطة معينة بالنسبة لنقاط تكون المسافة بينهما غير متساوية h≠ constant

$$L(X) = L_1(X)y_1 + L_2(X)y_2 + L_3(X)y_3 + L_4(X)y_4 + \;--\; L_n(x)y_n \text{-------9}$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)--}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)--}$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)--}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)--}$$

$$l_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4) - -}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4) - -}$$

$$l_4(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) - -}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3) - -}$$

ملاحظة : اذا كان لدينا 6 نقاط اي جدول مؤلف من 6 نقاط فيكون خمس اقواس في البسط وخمس اقواس في المقام اي ان عدد الاقواس يساوي عدد النقاط مطروح واحد

Ex. 6 If y(1)=12 , y(2)=15, y(5)=25, y(6)=30 find the value of y(4) =?

x	1	2	5	6
y	12	15	25	30

Sol.

$$L(X) = L_1(X)y_1 + L_2(X)y_2 + L_3(X)y_3 + L_4(X)y_4 + \; - - L_n(x)y_n$$

$$y(4) = \frac{(x-2)(x-5)(x-6)}{(-1)(-4)(-5)}(12) + \frac{(x-1)(x-5)(x-6)}{(1)(-3)(-4)}(15) + \frac{(x-1)(x-2)(x-6)}{(4)(3)(-1)}(25) + \frac{(x-1)(x-2)(x-5)}{(5)(4)(1)}(30)$$

$y(4) = -2.4 + 7.5 + 25 - 9 = 21.1$

Inverse Lagrange interpolation:

ملاحظة : هنا تكون القيمة المجهولة X والمعطاة y=f(x) يكون الحل بنفس الاسلوب السابق ولكن بابدال y بدل x

Ex. 7 Suppose a curve passes through the points (0,-4),(0.6,-3.64),(1,-3). Find the value of x when f(x)=y= -3.5

x	0	0.6	1
y	-4	-3.64	-3

Sol.

$$x = \frac{(y-y_2)(y-y_3)}{(y_1-y_2)(y_1-y_3)}(x_1) + \frac{(y-y_1)(y-y_3)}{(y_2-y_1)(y_2-y_3)}(x_2) + \frac{(y-y_1)(y-y_2)}{(y_3-y_1)(y_3-y_2)}(x_3)$$

$$x = \frac{(y+3.64)(y+3)}{(-0.63)(-1)}(0) + \frac{(y+4)(y+3)}{(0.36)(-0.64)}(0.6) + \frac{(y+4)(y+3.64)}{(1)(0.64)}(1)$$

X=0+0.651+0.109=0.76

Chapter Five

Numerical Differentiation and Integration

Numerical Differentiation:

ملاحظة : يستخدم التفاضل العددي لايجاد المشتقة للدالة التي يصعب ايجادها بالطرق التقليدية .

1- Numerical Differentiation by Newton forward formula:

$$f(x) = f_0 + \frac{\Delta f_0}{1!}u + \frac{\Delta^2 f_0}{2!}u(u-1) + \frac{\Delta^3 f_0}{3!}u(u-1)(u-2) + -- \qquad ---1$$

$$u = \frac{x - x_0}{h} \qquad --2$$

ولغرض تفاضل معادلة 1 نسبة لى x

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx} \qquad --3$$

$$\frac{dy}{du} = 0 + \Delta y + \frac{\Delta^2 y}{2}(2u-1) + \frac{\Delta^3 y}{6}(3u^2 - 6u + 2) --- \qquad -4$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{h} \qquad ---5$$

توضيح :

$$u = \frac{x - x_0}{h}$$

$$u = \frac{x}{h} - \frac{x_0}{h}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{h}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{h}\left[\Delta y + \frac{\Delta^2 y}{2}(2u-1) + \frac{\Delta^3 y}{6}(3u^2 - 6u + 2)\right] \quad \text{--6}$$

في حالة اراد المشتقة الثانية نشتق معادلة 6 مرة اخرى

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{du}\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{du}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{1}{h}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{du}\frac{1}{h}\left[\frac{1}{h}\left[\Delta y + \frac{\Delta^2 y}{2}(2u-1) + \frac{\Delta^3 y}{6}(3u^2 - 6u + 2)\right] + - - - - - - - -\right] \quad \text{--7}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{du}\frac{1}{h^2}\left[\Delta y + \frac{\Delta^2 y}{2}(2u-1) + \frac{\Delta^3 y}{6}(3u^2 - 6u + 2)\right]$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{h^2}\left[\frac{\Delta^2 y}{2}(2) + \frac{\Delta^3 y}{6}(12u-6) + ---\right]$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y + \Delta^3 y(u-1) + ---\right] \qquad --8$$

ملاحظة : في حالة u=0 عند $x=x_0$ فان معادلة 6 ، 8 تكون (اي قيمة X موجودة في الجدول)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{h}\left[\Delta y + \frac{\Delta^2 y}{2} + \frac{\Delta^3 y}{3} - \frac{\Delta^4 y}{4} + ---\right] \qquad ---9$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y - \Delta^3 y + \frac{11}{12}\Delta^4 y - \frac{10}{12}\Delta^5 y ---\right] \qquad ---10$$

EX. 1 Given the following table

x	1	1.5	2	2.5	3
y	1.729	1.691	1.505	1.416	1.311

Find y′ (1.5) , y″(1.5)?

Sol:

ملاحظة : نسخدم **Newton forward** لان القيمة المراد ايجاد المشتقة لها في بداية الجدول

x	$f(x)$	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
1.0	**1.729**				
		-0.038			
1.5	**1.691**		**-0.148**		
		-0.186		**0.245**	
2.0	**1.505**		**0.097**		**-0.358**
		-0.089		**-0.113**	
2.5	**1.416**		**-0.016**		
		-0.105			
3.0	**1.311**				

نلاحظ ان (1.5) قيمة موجودة ضمن الجدول لذا نستخدم معادلة 9 ،10

$$y'(1.5) = \frac{1}{h}\left[\Delta y + \frac{\Delta^2 y}{2} + \frac{\Delta^3 y}{3} - \frac{\Delta^4 y}{4} + - - -\right]$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y - \Delta^3 y + \frac{11}{12}\Delta^4 y - \frac{10}{12}\Delta^5 y - - -\right]$$

$$h = 0.5\,,\ \Delta y = -0.186, \Delta^2 y = 0.097\,, \Delta^3 y = 0.113$$

$$y'(1.5) = \frac{1}{0.5}\left[-0.186 - \frac{0.097}{2} + \frac{0.113}{3}\right] = -0.5443$$

$$y''(1.5) = \frac{1}{(0.5)^2}[0.097 - (-0.113)] = 0.84$$

2- Numerical Differentiation by Newton Backward Formula:

$$f(x) = f_0 + \frac{\nabla f_0}{1!}u + \frac{\nabla^2 f_0}{2!}u(u+1) + \frac{\nabla^3 f_0}{3!}u(u+1)(u+2) + --- \quad ---11$$

$$u = \frac{x - x_0}{h} \quad --12$$

ولغرض تفاضل معادلة 1 نسبة لى x

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx} \quad --13$$

$$\frac{dy}{du} = 0 + \nabla y + \frac{\nabla^2 y}{2}(2u+1) + \frac{\nabla^3 y}{6}(3u^2 + 6u + 2) --- \quad -14$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{h} \quad ---15$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{h}\left[\nabla y + \frac{\nabla^2 y}{2}(2u+1) + \frac{\nabla^3 y}{6}(3u^2 + 6u + 2)\right] \quad --16$$

في حالة اراد المشتقة الثانية نشتق معادلة 16 مرة اخرى

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{du}\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{du}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{1}{h}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{du}\frac{1}{h}\left[\frac{1}{h}\left[\nabla y + \frac{\nabla^2 y}{2}(2u+1) + \frac{\nabla^3 y}{6}(3u^2+6u+2)\right] + - - - - - - - -\right] \quad \text{--17}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{du}\frac{1}{h^2}\left[\nabla y + \frac{\nabla^2 y}{2}(2u+1) + \frac{\nabla^3 y}{6}(3u^2+6u+2) + -\right]$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{h^2}\left[\frac{\nabla^2 y}{2}(2) + \frac{\nabla^3 y}{6}(12u+6) + - - -\right]$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{h^2}\left[\nabla^2 y + \Delta^3 y(u+1) + - - -\right] \quad \text{--18}$$

ملاحظة : في حالة $u=0$ عند $x=x_0$ فان معادلة 6 ، 8 تكون (اي قيمة X موجودة في الجدول)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{h}\left[\nabla y + \frac{\nabla^2 y}{2} + \frac{\nabla^3 y}{3} + \frac{\nabla^4 y}{4} + - - -\right] \quad \text{---19}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{h^2}\left[\nabla^2 y + \nabla^3 y + \frac{11}{12}\nabla^4 y + \frac{10}{12}\nabla^5 y - - -\right] \quad \text{---20}$$

EX. 2 Find $y'(5)$, $y''(5)$ from the following table

x	0.0	1	2	3	4	5
y	0.0	2.5	8.5	15.5	24.5	36.5

Sol:

ملاحظة : نسخدم **Newton backward** لان القيمة المراد ايجاد المشتقة لها في نهاية الجدول

x	$f(x)$	∇	∇^2	∇^3	∇^4	∇^5
0	**0**					
		2.5				
1	**2.5**		**3.5**			
		6		**-2.5**		
2	**8.5**		**1**		**3.5**	
		7		**1**		**-3.5**
3	**15.5**		**2**		**0**	
		9		**1**		
4	**24.5**		**3**			
		12				
5	**36.5**					

$$u = \frac{x - x_0}{h} = \frac{5.0 - 5.0}{1.0} = 0$$

$$y'(5.0)=\frac{1}{h}\left[\nabla y+\frac{\nabla^2 y}{2}+\frac{\nabla^3 y}{3}+\frac{\nabla^4 y}{4}+---\right]$$

$$y'(5.0)=1\left[12+\frac{3}{2}+\frac{1}{3}+0+\frac{-3.5}{5}\right]=13.13$$

$$y''y''(5.0)=\frac{1}{h^2}\left[\nabla^2 y+\nabla^3 y+\frac{11}{12}\nabla^4 y+\frac{10}{12}\nabla^5 y---\right]$$

$(5.0)=1\left[3+1+\frac{11}{12}(\ 0)+\frac{10}{12}(-3.5)\right]$=1.083

3- Numerical Differentiation by using Lagrange Interpolation Formula:

ملاحظة : نستخدم هذه الطريقة لايجاد الدالة المجهولة عند نقطة معينة بالنسبة لنقاط تكون المسافة بينهما غير متساوية h≠ constant

$L(X)=L_1(X)y_1+L_2(X)y_2+L_3(X)y_3+L_4(X)y_4+\ --L_n(x)y_n$-------21

$$l_1(x)=\frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)--}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)--}$$

$$l_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)--}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)--}$$

$$l_3(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)--}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)--}$$

$$l_4(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)--}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)--}$$

$$f(x)=\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})}f(x_{i-1})+\frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})}f(x_i)+\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}f(x_{i+1}) \text{ ------------------------------------22}$$

ملاحظة : مثلا في حالة ثلاث نقاط .

X(1)-----------x_{i-1}

X(2)-----------x_i

X(3)-----------x_{i+1}

$$y'(x)=\frac{2x-x_i-x_{i+1}}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})}f(x_{i-1})+\frac{2x-x_{i-1}-x_{i+1}}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})}f(x_i)+\frac{2x-x_{i-1}-x_i}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}f(x_{i+1}) \text{ --------------------------------- ---23}$$

EX. 3 Find the first derivative of the function tabulated below at point 1.5 .

x	1.2	1.5	1.7
y	0.1823	0.4055	0.5306

Sol.

$$y'(x)=\frac{2x-x_i-x_{i+1}}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})}f(x_{i-1})+\frac{2x-x_{i-1}-x_{i+1}}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})}f(x_i)+\frac{2x-x_{i-1}-x_i}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}f(x_{i+1})$$

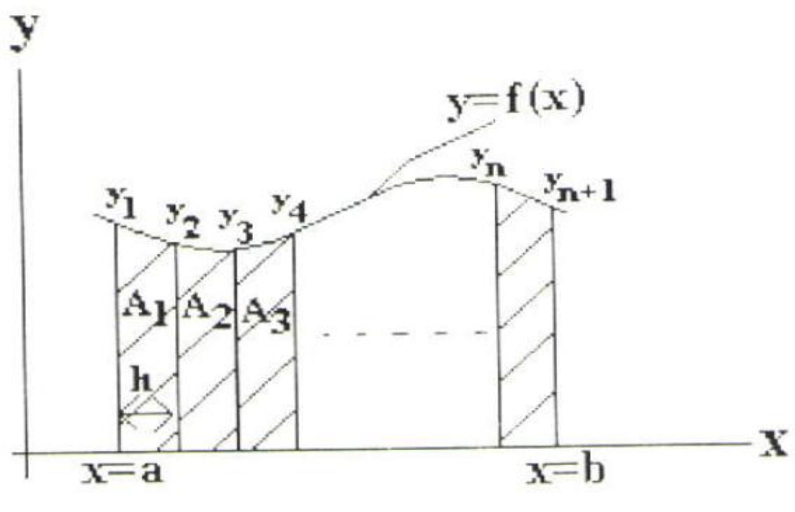
$$y'(x) = \frac{2(1.5) - 1.5 - 1.7}{(-0.3)(-0.5)}(0.1823) + \frac{2(1.5) - 1.2 - 1.7}{(0.3)(-0.2)}(0.4055) + \frac{2(1.5) - 1.2 - 1.5}{(0.5)(0.2)}(0.5306) = 0.6729$$

Integration Methods

1-Trapezoidal Rule

ملاحظة : تستخدم هذه الطريقة لايجاد القيمة التقريبية للتكامل للدالة F(X) ضمن المجال من a-------b .

$$I = \int_a^b f(x)dx$$



خطوات الحل :

1- لغرض حساب المساحة تحت المنحني يتم تجزئة المجال من b------a الى شرائح متساوية الاطوال ، طول كل منها يساوي h

$$h = \frac{b-a}{N} \qquad --1$$

بداية المجال : a

نهاية المجال: b

عدد الشرائح : N

2- يمكن ملاحظة ان كل شريحة تاخذ شكل شبه المنحرف والتي يمكن حساب مساحتها وفقا لقاعدة شبه المنحرف .

$$A_1 = \frac{1}{2}(Y_1 + Y_2)h \qquad ---2$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(Y_2 + Y_3)h$$

وهكذا

3- لحساب المساحة الكلية التقريبية المحصورة تحت المنحني وبين x=a ، x=b من خلال جمع مجموعة المساحات تحت المنحني .

$$A_{total} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + --A_n \qquad ---3$$

$$A_{total} = \frac{1}{2}(Y_1 + Y_2)h + \frac{1}{2}(Y_2 + Y_3)h + \frac{1}{2}(Y_3 + Y_4)h + - - - \frac{1}{2}(Y_4 + Y_5)h \qquad ----4$$

$$A_{total} = \frac{h}{2}(Y_1 + 2Y_2 + 2Y_3 + 2Y_4 \pm - - -2Y_n + Y_{n+1}) \quad ---5$$

ملاحظة : تعتمد الدقة في هذه الطريقة على عدد الشرائح . اي كلما زادت عدد الشرائح زادت الدقة وقلت قيمة h .

EX. 4 Evaluate to find $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ decimal places by Trapezoidal rule, where the interval (0, 1) is sub-divided into (6) equal part

Sol.

$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(Y_1 + 2Y_2 + 2Y_3 + 2Y_4 \pm - - -2Y_n + Y_{n+1})$$

N=6

$$h = \frac{b-a}{N} = \frac{1-0}{6} = \frac{1}{6}$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

ملاحظة:

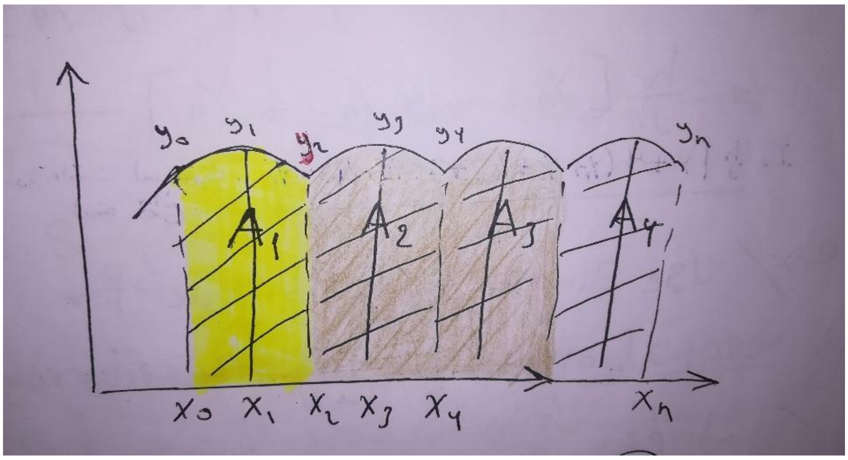
ان قيمة $x_0=0$ تمثل بداية الفترة ، فيمة $x_6=1$ تمثل نهاية الفترة قيمة x_1 تمثل x_0+h و هكذا .

x	0	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6=1
$y=f(x)=\frac{1}{1+x^2}$	1	0.9729	0.90	0.80	0.6923	0.5901	0.50

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{6}[1 + 2(0.9729 + 0.9 + 0.80 + 0.6923 + 0.5901) + 0.5] = 0.7842$$

2-Simpson rule (1/3):

ملاحظة : تستخدم هذه الطريقة في حالة عدد زوجي من الشرائح



لحساب المساحة الواحدة :

$$A = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2] \qquad ---1$$

ملاحظة : لحساب المساحة الواحدة يتطلب وجود شريحتين لذا يتطلب وجود عدد زوجي من الشرائح لحساب بقية المساحات وبشرط ان تكون هذه الشرائح متجاورة والمسافة بين شريحة واخرى متساوية.

$$A_{Total} = A_1 + A_2 + A_3 + - - - - A_n$$

$$I = \int_a^b f(x)dx = A_{Total}$$

$$h = \frac{b-a}{N}$$

بداية المجال : a

نهاية المجال: b

عدد الشرائح : N

$$I = \int_a^b f(x)dx = A_{Total} = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2] + \frac{h}{3}[y_2 + 4y_3 + y_4] + \frac{h}{3}[y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n] \qquad --2$$

$$I = \int_a^b f(x)dx = A_{Total} = \frac{h}{3}[y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5) + 2(y_2 + y_4) + y_6] \qquad ---3$$

EX. 5 Evaluate to find $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ decimal places by Simpsons rule, where the interval (0, 1) is sub-divided into (6) equal part

Sol.

$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2] + \frac{h}{3}[y_2 + 4y_3 + y_4] + \frac{h}{3}[y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n]$$

N=6

$$h = \frac{b-a}{N} = \frac{1-0}{6} = \frac{1}{6}$$

x	**0**	**1/6**	**2/6**	**3/6**	**4/6**	**5/6**	**6/6=1**
y=$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$	**1**	**0.9729**	**0.90**	**0.80**	**0.6923**	**0.5901**	**0.50**

$$I = \frac{1/6}{3}[1 + 4(0.97297 + 0.8 + 0.59016) + 2(0.9 + 0.6923) + 0.5] = 0.7853$$

3-Simpson rule (3/8):

ملاحظة1 : تستخدم هذه الطريقة في حالة عدد فردي من الشرائح .

ملاحظة2 : اذا كان عدد الشرائح الكلي يقبل القسمة على (3) بدون باقي نستخدم هذه الطريقة .

$$I = \frac{3h}{8}[(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y3) + (y_3 + 3y_4 + 3y_5 + y6)] \quad --4$$

EX. 6 use Simpson's rule (3/8) to find $\int_0^1 x^4$ considering 6 strips

Sol.

N=6

$$h = \frac{b-a}{N} = \frac{1-0}{6} = \frac{1}{6}$$

x	0	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6=1
y=$f(x) = x^4$	0	0.00077	0.01234	0.0625	0.1975	0.4822	1.0

$I = \frac{3h}{8}[(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y3) + (y_3 + 3y_4 + 3y_5 + y6)]$=0.200224

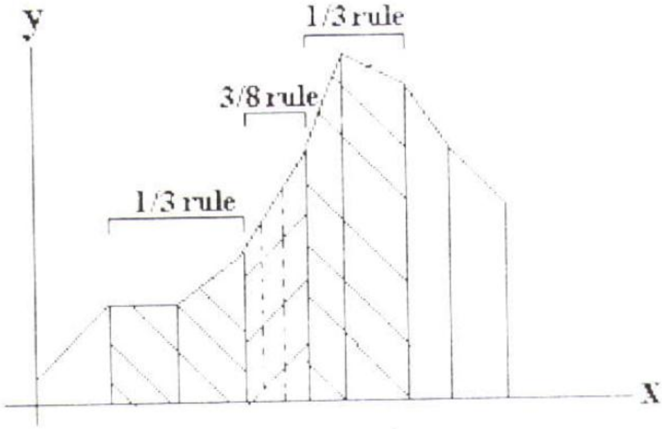
4- Integration with unequal Segments:

ملاحظة: تستخدم هذه الطريقة في حالة h غير متساوية بيت شريحة واخرى .

$$I = h_1 \frac{f(x_1)+f(x_0)}{2} + h_2 \frac{f(x_2)+f(x_1)}{2} + - - - - - - h_n \frac{f(x_n)+f(x_{n-1})}{2} \quad ----- \quad 5$$

EX. 7 Use Trapezoidal rule to determine the integral of data in the following table.

x	F(x)
0.0	0.2000
0.12	1.3097
0.22	1.3052
0.32	1.74332
0.36	2.0749
0.40	2.4560
0.44	2.8430
0.54	3.5073
0.64	3.1819
0.70	2.3630
0.80	2.3200

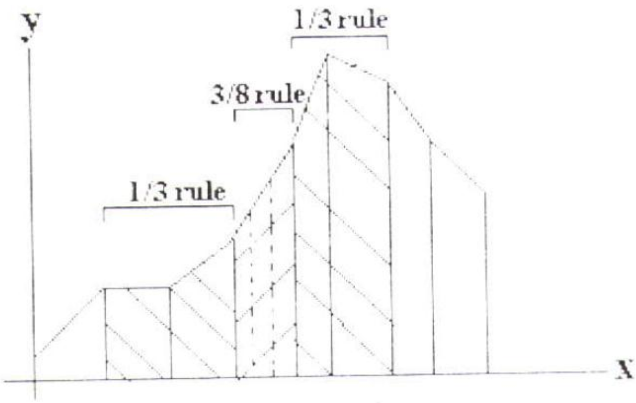


Sol.

$$I = h_1 \frac{f(x_1) + f(x_0)}{2} + h_2 \frac{f(x_2) + f(x_1)}{2} + - - - - - - - h_n \frac{f(x_n) + f(x_{n-1})}{2}$$

$$I = 0.12 \frac{1.3097 + 0.2}{2} + 0.1 \frac{1.3052 + 1.3097}{2} + 0.1 \frac{1.74332 + 1.3052}{2} + 0.04 \frac{2.0749 + 1.74332}{2} + 0.04 \frac{2.4560 + 2.0749}{2} + 0.04 \frac{2.843 + 2.4560}{2} + 0.1 \frac{3.5073 + 2.8430}{2} + 0.1 \frac{3.1819 + 3.5073}{2} + 0.06 \frac{2.3630 + 3.1819}{2} + 0.1 \frac{2.3200 + 2.3630}{2} = 1.5648$$

x	F(x)
0.0	0.2000
0.12	1.3097
0.22	1.3052
0.32	1.74332
0.36	2.0749
0.40	2.4560
0.44	2.8430
0.54	3.5073
0.64	3.1819
0.70	2.3630
0.80	2.3200



ملاحظة : يمكن حل المثال السابق بطريقة اخرى خصوصا اذا لم يحدد اي طريقة للحل .

- الشريحة الاولى تحل بطريقة شبه المنحرف
- الشريحة الثانية والثالثة h=constant وعدد زوجي تحل بطريقة Simpson's rule (1/3).
- الشرائح الرابعة والخامسة والسادسة ايضا h=constant وعدد فردي تحل بطريقة Simpson's rule (3/8)
- الشرائح 7،8 تحل Simpson's rule (1/3)
- الشريحة 9 تحل Trapezoidal

الشريحة 10 تحل Trapezoidal

$$I_1 = A_1 = \frac{0.12}{2}(0.200 + 1.3097) = 0.09058$$

$$I_2 = A_2 = \frac{0.1}{3}(1.3097 + 4(1.3052) + 1.7432) = 0.2785$$

$$I_3 = A_3 = \frac{3 * 0.04}{8}(1.79332 + 3(2.0749 + 2.456) + 2.843) = 0.27268$$

$$I_4 = A_4 = \frac{0.1}{3}(2.843 + 4(3.5073) + 3.1819) = 0.66847$$

$$I_5 = A_5 = \frac{0.06}{2}(3.1819 + 2.3630) = 0.166347$$

$$I_6 = A_6 = \frac{0.1}{2}(2.3630 + 2.3200) = 0.2341$$

$$I_{total} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 = 1.70797$$

Chapter six

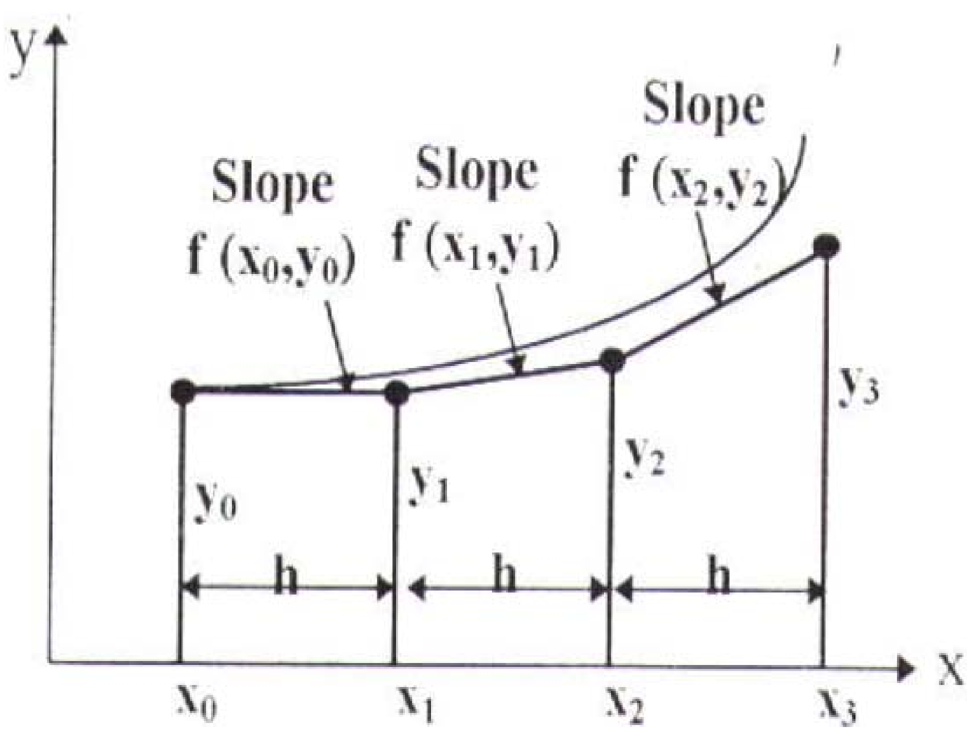
Solution of ordinary differential equations

1- Euler method
2- Range Kutta method

Euler's simple method:

تعتبر هذه الطريقة من ابسط الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية، حيث ان الحل يعتمد على تقسيم مجال الحل التكاملي الى خطوات متعددة ذات عرض h على طول الاحداثي x .

ملاحظة: تعتبر هذه الطريقة غير قادرة على اعطاء الحل المثالي لابتعاد الحل العددي عن المنحني الصحيح (exact solution).



خطوات الحل :

1- الصيغة العامة :

$$y_{r+1} = y_r + hy'(x_r, y_r) \qquad --1$$

r=0,1,2,3,4------n

2- عند r=0 نجد قيمة y_1 من خلال تعويض القيم الابتدائية B.C المعطاة في السؤال في معادلة 1 .

3- نجد قيم y الجديدة y_2 عند r=1 عند تعويض قيمة y_1 و $x_1=x_0+h$ في معادلة 1 وهكذا لحين الوصول الى اخر قيمة y وحسب معطيات السؤال كما في المثال التالي .

EX.1 Use Euler's simple method to obtain an approximate numerical solution of ordinary differential equation.

$$\frac{dy}{dx} = y' = x^2 + 4x - \frac{1}{2}y$$

B.C X=0 y=4

For x=0 (0.05) 0.25 (2D)

<u>Sol.</u>

First value of x =0, last value of x =0.25, h=0.05

$$y_{r+1} = y_r + hy'(x_r, y_r)$$

At $x_0=0$, $y_0=4$, r=0

$$y_1 = y_0 + h(x_0^2 + 4x_0 - \frac{1}{2}y_0)$$

$y_1 = 4 + 0.05(0 + 0 - \frac{1}{2} * 4)$=3.9

At x_1=0+0.05=0.05 , y_1=3.9 , r=1

$$y_2 = y_1 + h(x_1^2 + 4x_1 - \frac{1}{2}y_1)$$

$y_2 = 3.9 + 0.05(0.05^2 + 4 * 0.05 - \frac{1}{2} * 3.9)$=3.81

At x_2=0.1, y_2=3.81 , r=2

$$y_3 = y_2 + h(x_2^2 + 4x_2 - \frac{1}{2}y_2)$$

$$y_3 = 3.81 + 0.05\left(0.1^2 + 4 * 0.1 - \frac{1}{2} * 3.81\right) = 3.73$$

At x_3=0.15, y_3=3.73 , r=3

$$y_4 = y_3 + h(x_3^2 + 4x_3 - \frac{1}{2}y_3)$$

$$y_4 = 3.73 + 0.05\left(0.15^2 + 4 * 0.15 - \frac{1}{2} * 3.73\right) = 3.67$$

At x_4=0.2, y_3=3.67 , r=4

$$y_5 = y_4 + h(x_4^2 + 4x_4 - \frac{1}{2}y_4)$$

$$y_5 = 3.67 + 0.05\left(0.2^2 + 4 * 0.2 - \frac{1}{2} * 3.67\right) = 3.62$$

At x_5=0.25, y_5=3.62 , r=5

$$y_6 = y_5 + h(x_5^2 + 4x_5 - \frac{1}{2}y_5)$$

$$y_6 = 3.62 + 0.05\left(0.25^2 + 4 * 0.25 - \frac{1}{2} * 3.62\right) = 3.59$$

r	x	y
0	0	4
1	0.05	3.9
2	0.1	3.73
3	0.15	3.67
4	0.2	3.62
5	0.25	3.59

Euler's Modified method(Trapezoidal method):

خطوات الحل :

1- لايجاد y_1 نستخدم القوانين التالية :

When r =0

$$y_1^r = y_r + hy'(x_r, y_r)$$

$$y_1^0 = y_0 + hy'(x_0, y_0) \qquad ---2$$

When r =1

$$y_1^1 = y_0 + \frac{h}{2}[y'(x_0, y_0) + y'(x_1, y_1)^0] \qquad ---3$$

ملاحظة : قيمة y_1 في معادلة 3 تعوض من ناتج معادلة 2

When r =2

$$y_1^2 = y_0 + \frac{h}{2}[y'(x_0, y_0) + y'(x_1, y_1)^1] \qquad ---4$$

ملاحظة : قيمة y_1 في معادلة 4 تعوض من ناتج معادلة 3 وهكذا لحين ثبوت قيمة y_1

2- نجد قيم y الجديدة y_2 بنفس الخطوات اعلاه لحين ثبوت قيمة y_2 ، وهكذا لحين الوصول الى اخر قيمة y وحسب معطيات السؤال كما في المثال التالي .

3- عند حساب قيمة الجديدة، قيمة y التي ثبتت سوف تكون هي قيمة y_0 عند تكرار الخطوات السابقة لحساب قيمة y الجديدة .

Ex.2 Use Euler's Modified method to solve the following differential equation .

$$\frac{dy}{dx} = y' = x^2 + 4x - \frac{1}{2}y$$

B.C X=0 y=4

For x=0 (0.05) 0.2 (3D)

<u>Sol.</u>

$y_1^0 = y_0 + hy'(x_0, y_0)$

$y_1^0 = 4 + 0.05(0 + 0 - \frac{1}{2}4)$=3.9

$y_1^1 = y_0 + \frac{h}{2}[y'(x_0, y_0) + y'(x_1, y_1)^0]$

$y_1^1 = 4 + \frac{0.05}{2}[0 + 0 - \frac{1}{2}4 + 0.05^2 + 4 * 0.05 - \frac{1}{2} *$
3.9]=3.906

$$y_1^2 = y_0 + \frac{h}{2}[y'(x_0, y_0) + y'(x_1, y_1)^1]$$

$y_1^1 = 4 + \frac{0.05}{2}[0 + 0 - \frac{1}{2}4 + 0.05^2 + 4 * 0.05 - \frac{1}{2} *$
$3.906]$=3.906

y_1= 3.906

ملاحظة : تم اعتماد هذه القيمة لثبوت قيمة y_1= 3.906

To find y_2

X_2= x_1+h=0.05+0.05= 0.1 ,y_0=3.906 , x_0=0.05

$$y_2^0 = y_0 + hy'(x_0, y_0)$$

$y_2^0 = 3.906 + 0.05(0.05^2 + 4 * 0.05 - \frac{1}{2}3.906)$=3.818

$$y_2^1 = y_0 + \frac{h}{2}[y'(x_0, y_0) + y'(x_1, y_1)^0]$$

$y_2^1 = 3.906 + \frac{0.05}{2}[0.05^2 + 4 * 0.05 - \frac{1}{2}3.906 + 0.1^2 +$
$4 * 0.1 - \frac{1}{2} * 3.818]$=3.824

$$y_2^2 = y_0 + \frac{h}{2}[y'(x_0, y_0) + y'(x_1, y_1)^1]$$

$y_2^2 = 3.906 + \frac{0.05}{2}[0.05^2 + 4 * 0.05 - \frac{1}{2}3.906 + 0.1^2 +$
$4 * 0.1 - \frac{1}{2} * 3.824]$=3.878

$$y_2^3 = y_0 + \frac{h}{2}[y'(x_0, y_0) + y'(x_1, y_1)^2]$$

$y_2^3 = 3.906 + \frac{0.05}{2}[0.05^2 + 4 * 0.05 - \frac{1}{2}3.906 + 0.1^2 + 4 * 0.1 - \frac{1}{2} * 3.878]$=3.824

$$y_2^4 = y_0 + \frac{h}{2}[y^{'}(x_0, y_0) + y^{'}(x_1, y_1)^3]$$

$y_2^4 = 3.906 + \frac{0.05}{2}[0.05^2 + 4 * 0.05 - \frac{1}{2}3.906 + 0.1^2 + 4 * 0.1 - \frac{1}{2} * 3.824]$=3.824

y_2= 3.824

X_3= x_2+h=0.1+0.05=0.15 ,y_0=3.824, x_0=0.1

$$y_3^0 = y_0 + hy^{'}(x_0, y_0)$$

$y_3^0 = 3.824 + 0.05(0.1^2 + 4 * 0.1 - \frac{1}{2}3.824)$=3.748

$$y_3^1 = y_0 + \frac{h}{2}[y^{'}(x_0, y_0) + y^{'}(x_1, y_1)^0]$$

$y_3^1 = 3.824 + \frac{0.05}{2}[0.1^2 + 4 * 0.1 - \frac{1}{2}3.824 + 0.15^2 + 4 * 0.15 - \frac{1}{2} * 3.748]$=3.755

$$y_3^2 = y_0 + \frac{h}{2}[y^{'}(x_0, y_0) + y^{'}(x_1, y_1)^1]$$

$y_2^2 = 3.824 + \frac{0.05}{2}[0.1^2 + 4 * 0.1 - \frac{1}{2}3.824 + 0.15^2 + 4 * 0.15 - \frac{1}{2} * 3.755]$=3.755

y_3= 3.755

To find y_4

$X_3= x_3+h=0.15+0.05=0.2$,$y_0=3.755$, $x_0=0.15$

$$y_4^0 = y_0 + hy'(x_0, y_0)$$

$$y_4^0 = 3.755 + 0.05(0.15^2 + 4 * 0.15 - \frac{1}{2}3.755)=3.692$$

$$y_4^1 = y_0 + \frac{h}{2}[y'(x_0, y_0) + y'(x_1, y_1)^0]$$

$$y_4^1 = 3.755 + \frac{0.05}{2}[0.15^2 + 4 * 0.15 - \frac{1}{2}3.755 + 0.2^2 + 4 * 0.2 - \frac{1}{2} * 3.692]=3.698$$

$$y_4^2 = y_0 + \frac{h}{2}[y'(x_0, y_0) + y'(x_1, y_1)^1]$$

$$y_4^2 = 3.755 + \frac{0.05}{2}[0.15^2 + 4 * 0.15 - \frac{1}{2}3.755 + 0.2^2 + 4 * 0.2 - \frac{1}{2} * 3.698]=3.698$$

$y_4= 3.698$

r	x	y
0	0	4
1	0.05	3.906
2	0.1	3.824
3	0.15	3.755
4	0.2	3.698

Ex. 3 The rate of cooling of a body can be expressed as

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$$

Where (T) is the temperature of the body in C^o. (T_a) is the ambient temperature and (k) is proportionality constant. A body is initial heated at (90 C^o) is dropped into water that hold at constant value of (T_a=20 C^o). Use Trapezoidal method to compute the temperature after (0.5 sec) with time step (h=0.25). given that k=0.1, use (4D).

SOL.

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a) \qquad \text{--1}$$

$$\frac{dT}{dt} = -0.1(T - 20)$$

$$\frac{dT}{dt} = 2 - 0.1T$$

ملاحظة : ذكر في السؤال A body is initial heated at (90 C^o)

اي عند الزمن t=0

By use Trapezoidal method :

$$y_1^r = y_r + hy'(x_r, y_r)$$

$$T_1^0 = T_0 + h\frac{dT}{dt}(t_0, T_0)$$

$$T_1^0 = 90 + 0.25(2 - 0.1(90)) = 88.25$$

$$T_1^1 = T_0 + \frac{h}{2}(2 - 0.1(90) + (2 - 0.1(T_1^0))$$

$$T_1^1 = T_0 + \frac{h}{2}(2 - 0.1(90) + (2 - 0.1(88.25))=82.2718$$

or

$$T_1^1 = 89.373 - 0.0125T_1^0$$

$$T_1^1 = 89.373 - 0.0125(88.25) = 82.2718$$

$$T_1^2 = 89.373 - 0.0125(82.2718) = 88.2717$$

$$T_1^3 = 89.373 - 0.0125(88.2717) = 88.2717$$

To find T_2

$$T_2^0 = T_0 + h\frac{dT}{dt}(t_1, T_1)$$

$$T_2^0 = 88.2717 + 0.25(2 - 0.1(88.2717))=86.5649$$

$$T_2^1 = T_0 + \frac{h}{2}(2 - 0.1(90) + (2 - 0.1(T_1^0))$$

$$T_2^1 = T_0 + \frac{h}{2}(2 - 0.1(88.2717) + (2 - 0.1(86.5649))$$

or

$$T_2^1 = 87.6683 - 0.0125T_2^0$$

$$T_2^1 = 87.6683 - 0.0125(86.5649) = 86.5862$$

$$T_2^2 = 87.6683 - 0.0125(86.5862) = 86.5861$$

$$T_2^3 = 87.6683 - 0.0125(86.5861) = 86.5861$$

r	t	T
0	0	90
1	0.25	88.2717
2	0.5	86.5861

Range Kutta method :

تعتبر هذه الطريقة اكثر دقة من الطرق السابقة .

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

$$k_1 = h\, y'(x_0, y_0)$$

$$k_2 = h\left[x_0 + \frac{h}{2}\left(y_0 + \frac{k_1}{2}\right)\right]$$

$$k_3 = h\left[x_0 + \frac{h}{2}\left(y_0 + \frac{k_2}{2}\right)\right]$$

$$k_4 = h[x_0 + h(y_0 + k_3)]$$

EX. 4 Solve the following differential equation . Use Range Kutta method :

$$\frac{dy}{dx} = y' = x + y$$

B.C y(0)=1 For x=0 (0.1) 0.1(4D)

<u>Sol:</u>

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

$$k_1 = h\, y'(x_0, y_0)$$

$$k_1 = 0.1\, y'(x + y)$$

$$k_1 = 0.1\,(0 + 1) = 0.1000$$

$$k_2 = h\left[x_0 + \frac{h}{2}\left(y_0 + \frac{k_1}{2}\right)\right]$$

$$k_2 = 0.1\left[0 + \frac{0.1}{2}\left(1 + \frac{0.1000}{2}\right)\right] = 0.1100$$

$$k_3 = h\left[x_0 + \frac{h}{2}\left(y_0 + \frac{k_2}{2}\right)\right]$$

$$k_3 = 0.1\left[0 + \frac{0.1}{2}\left(1 + \frac{0.1100}{2}\right)\right] = 0.1105$$

$$k_4 = h[x_0 + h(y_0 + k_3)]$$

$$k_4 = 0.1[0 + 0.1(1 + 0.1105)] = 0.12105$$

$$y_{(0.1)} = 1.0000 + \frac{1}{6}[0.1000 + 2(0.1100) + 2(0.1105) + (0.12105)] = 1.11034$$

Range Kutta merson :

من مساوئ Range Kutta هي عدم قدرتها على تقدير الخطا (التقريب العشري)، لذا يستخدم هذه الطريقة التي لها القدرة على تقدير هذا الخطا .

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}[k_1 + 4k_4 + k_5]$$

$$k_1 = h\, y'(x_0, y_0)$$

$$k_2 = h\left[x_0 + \frac{h}{3} + y_0 + \frac{k_1}{3}\right]$$

$$k_3 = h\left[x_0 + \frac{h}{3} + y_0 + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{6}\right]$$

$$k_4 = h\left[x_0 + \frac{h}{2} + y_0 + \frac{k_1}{8} + \frac{3k_3}{8}\right]$$

$$k_5 = h\left[x_0 + h + y_0 + \frac{k_1}{2} - \frac{3k_3}{2} + 2k_4\right]$$

$$Error = \frac{1}{30}[2k_1 - 9k_3 + 8k_4 - k_5]$$

EX. 5 Solve the following differential equation . Use Range Kutta merson method :

$$\frac{dy}{dx} = y' = x + y$$

B.C y(0)=1 For x=0 (0.1) 0.1(4D)

<u>Sol:</u>

$$k_1 = h\, y'(x_0, y_0)$$

$$k_1 = 0.1\,(0 + 1) = 0.1000$$

$$k_2 = h\left[x_0 + \frac{h}{3} + y_0 + \frac{k_1}{3}\right]$$

$$k_2 = 0.1\left[0 + \frac{0.1}{3} + 1 + \frac{0.1}{3}\right]=0.1067$$

$$k_3 = h\left[x_0 + \frac{h}{3} + y_0 + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{6}\right]$$

$$k_3 = 0.1\left[0 + \frac{0.1}{3} + 1 + \frac{0.1000}{6} + \frac{0.1067}{6}\right]=0.1068$$

$$k_4 = h\left[x_0 + \frac{h}{2} + y_0 + \frac{k_1}{8} + \frac{3k_3}{8}\right]$$

$$k_4 = 0.1\left[0 + \frac{0.1}{2} + 1 + \frac{0.1000}{8} + \frac{3(0.1068)}{8}\right]=0.1103$$

$$k_5 = h\left[x_0 + h + y_0 + \frac{k_1}{2} - \frac{3k_3}{2} + 2k_4\right]$$

$$k_5 = 0.1\left[0 + 0.1 + 1 + \frac{0.1}{2} - \frac{3(0.1068)}{2} + 2(0.1103)\right]$$

$=0.1210$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}[k_1 + 4k_4 + k_5]$$

$$y_1 = 1 + \frac{1}{6}[0.1 + 4(0.1103) + (0.1210)]=1.1104$$

$$Error = \frac{1}{30}[2k_1 - 9k_3 + 8k_4 - k_5]$$

$$Error = \frac{1}{30}[2(0.1) - 9(0.1068) + 8(0.1103) - (0.1210)]$$
$$= 6.667 * 10^{-6}$$